Univ. of
Toronto
Library

Physical &
Applied Sci.
Serials

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/bulletinsocit45soci

Physical &
Applied Sci.
Serials

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58034 55, quai des Grands-Augustins.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTE-CINQUIÈME. — ANNÉE 1917.

155283
15/6/20

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

1917

QA
1
.S59
t.45-46

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

LE THÉORÈME DE BOREL DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Introduction. — Dans la théorie des ensembles linéaires, un théorème fondamental a été énoncé par M. Borel. J'ai étendu dans ma Thèse ce théorème au cas d'ensembles abstraits appartenant à une classe très générale, en modifiant très légèrement le raisonnement de M. Borel.

Une nouvelle modification permet d'étendre le théorème à une classe d'éléments encore plus générale. Et cette fois l'extension obtenue est, à un certain point de vue, définitive. En effet, nous montrons d'abord que le théorème de Borel convenablement énoncé est vrai dans toute classe d'éléments jouissant de la propriété que tout ensemble dérivé y est fermé. Puis, *réciproquement, que toute classe d'éléments à laquelle le théorème de Borel s'étend est nécessairement une classe où tout ensemble dérivé est fermé.*

Dans la seconde Partie de cette Note, je généralise également ce qu'on peut appeler « le théorème de Borel-Lebesgue ». Mais la généralisation est moins étendue. Elle résulte au reste des théorèmes que j'ai démontrés ailleurs et d'une remarque de M. T. Hildebrandt. Mais je l'expose ici directement au moyen de deux lemmes préliminaires seulement; ceux-ci sont évidents quand les ensembles sont linéaires, la démonstration du théorème lui-même ne souffrant aucune complication quand on passe du cas des ensembles linéaires au cas des ensembles abstraits.

Pour éviter d'avoir à renvoyer à ma Thèse, je rappelle explici-

tement ci-après toutes les définitions qui seront utilisées par la suite :

J'appelle *classe* ($\mathfrak{L}$) une classe d'éléments dans laquelle la limite d'une suite d'éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est définie, de façon quelconque d'ailleurs, pourvu que :

1° Si $A_1, A_2, \ldots$ sont identiques, la suite soit nécessairement convergente et que sa limite soit A_1 ;

2° Toute suite extraite d'une suite convergente soit aussi convergente et vers la même limite.

Un ensemble E est *compact* si, de toute infinité d'éléments appartenant à E, on peut extraire une suite convergente (dont la limite d'ailleurs peut ne pas appartenir à E).

L'ensemble *dérivé* E′ d'un ensemble E est l'ensemble de ses éléments limites. L'ensemble E est *fermé* s'il comprend son dérivé E′.

Un élément A est *intérieur* à un ensemble E dans une classe ($\mathfrak{L}$) s'il appartient à E et s'il n'est, d'aucune façon, limite d'une suite d'éléments de la classe n'appartenant pas à E.

Nous appellerons *classe* ($\mathcal{S}$) toute classe ($\mathfrak{L}$) dans laquelle tous les ensembles dérivés des ensembles d'éléments de cette classe sont fermés.

I. — Théorème de Borel.

Lemme de Hedrick [1]. — Si un élément A intérieur à un ensemble E d'éléments d'une classe ($\mathcal{S}$) est limite d'une suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ d'éléments de cette classe, les éléments de cette suite sont eux-mêmes intérieurs à l'ensemble E à partir d'un certain rang.

En effet, puisque A est intérieur à E, les éléments de la suite des A_n appartiennent à E à partir d'un certain rang n_0. Si le lemme n'était pas exact, il y aurait une infinité d'éléments A_n de rangs supérieurs à n_0 qui seraient limites d'éléments $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(p)}, \ldots$ n'appartenant pas à E. Mais la classe d'éléments considérée étant une classe ($\mathcal{S}$), l'ensemble dérivé de l'ensemble des A_n^p ($n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$; $p = 1, 2, \ldots$) est fermé; par suite l'élément A serait limite d'une suite d'éléments A_n^p ; ceux-ci n'appartenant pas à E, A ne serait pas intérieur à E contrairement à l'hypothèse.

---

[1] *Transactions of the American Math. Soc.*, vol. XII, 1911, p. 285-294.

Théorème de Borel. — Soit E un ensemble compact et fermé appartenant à une classe (S). Si $\mathcal{F}$ est une famille dénombrable d'ensembles I_n telle que tout élément de E soit intérieur à l'un des I_n, on peut toujours extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ formée d'un nombre fini des ensembles I_n et telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I_n de la famille $\mathcal{F}_1$.

En effet, si le théorème était inexact, il existerait au moins un élément A_1 de E, qui n'est pas intérieur à I_1. Mais A_1 est intérieur à l'un des ensembles $I_2, I_3, \ldots$. Soit I_{q_1} le premier à qui A_1 est intérieur $(q_1 > 1)$. Il y a au moins un élément A_2 de E qui n'est intérieur à aucun des ensembles $I_1, I_2, \ldots, I_{q_1}$. Mais A_2 est intérieur à l'un au moins des ensembles I, soit I_{q_2}, le premier $(q_2 > q_1)$. Et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie d'éléments $A_1, A_2, \ldots$ appartenant à E, tous distincts et tels que A_{r+1} ne soit intérieur à aucun des ensembles $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_{q_r}$. De cette suite, on peut extraire une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ qui converge vers un élément A de E (puisque E est compact et fermé). Or A est intérieur à un des ensembles I, soit I_k. Et comme il est limite de la suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, les éléments de cette suite sont, d'après le lemme de Hedrick, intérieurs à I_k à partir d'un certain rang. Or, puisque $q_1 < q_2 < \ldots$, on a pour r assez grand $q_r > k$; dès lors, pour r assez grand, A_{r+1} ne pourrait être intérieur à I_k. On arrive ainsi à la contradiction prévue [1].

Champ d'application du théorème de Borel. — Il est intéressant maintenant de constater que *les deux propriétés d'une classe d'éléments exprimées l'une par le théorème de Borel, l'autre par la proposition d'après laquelle tout ensemble dérivé est fermé, sont entièrement équivalentes.*

En d'autres termes :

Considérons une classe $(\mathcal{L})$ (c'est-à-dire une classe où la limite est définie). Si pour tout ensemble E compact et fermé d'éléments de cette classe, et toute famille dénombrable $\mathcal{F}$ d'ensembles I_n telle

---

[1] Dans ma Thèse, je n'avais démontré le théorème de Borel que pour des classes (moins générales) où la limite est définie en partant de la notion de distance ou de voisinage.

que chaque élément de E soit intérieur à l'un au moins des ensembles I_n, on peut extraire de F une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I_n et jouissant de la même propriété que $\mathcal{F}$; alors la classe ($\mathcal{L}$) est en outre une classe ($\mathcal{S}$), c'est-à-dire que les ensembles dérivés y sont tous fermés.

En effet, supposons que le théorème de Borel soit vrai pour une certaine classe ($\mathcal{L}$). Montrons que si F est un ensemble quelconque d'éléments de cette classe, son ensemble dérivé F' est fermé. C'est-à-dire que si une suite d'éléments de F' : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ converge vers un élément A, A appartient à F'. Or A_n est la limite d'une suite d'éléments de F : $A_n^1, A_n^2, \ldots, A_n^p, \ldots$. Appelons I_0 l'ensemble formé par les éléments de la classe autres que les A_n^p ($n = 1, 2 \ldots, p = 1, 2 \ldots$) et I_n l'ensemble formé par les éléments de la classe autres que $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$. L'élément A_n appartient à I_n et n'est limite d'aucune suite extraite de la suite d'éléments n'appartenant pas à I_n : A_n est intérieur à I_n. Il appartient à I_0, mais est limite des éléments $A_n^1, A_n^2, \ldots$ qui n'appartiennent pas à I_0 : A_n n'est pas intérieur à I_0. L'élément A appartient à I_0 ; mais si A n'appartenait pas à F', A ne serait limite d'aucune suite des éléments $A_n^{(p)}$ qui n'appartiennent pas à I_0. Donc A serait intérieur à I_0.

Par suite, on pourrait appliquer le théorème de Borel à l'ensemble E formé par A, A_1, A_2, ... (ensemble qui est bien compact et fermé) et à la famille dénombrable $\mathcal{F}$ formée par les ensembles $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$. On pourrait donc remplacer $\mathcal{F}$ par une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I tirés de $\mathcal{F}$.

Mais, en dehors de $\mathcal{F}_1$, il resterait une infinité d'ensembles I : soient $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots$. Et alors les éléments $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ ne pourraient être intérieurs à aucun des ensembles I de $\mathcal{F}_1$ contrairement à la définition de $\mathcal{F}_1$.

Réciproque du théorème de Borel. — La réciproque du théorème de Borel s'étend à un champ encore plus vaste que les classes ($\mathcal{S}$).

Soient E un ensemble appartenant à une classe ($\mathcal{L}$) et $\mathcal{F}$ une famille dénombrable d'ensembles I_n telle que tout élément de E est intérieur à l'un des I_n. Si, quelle que soit la famille $\mathcal{F}$, on peut en extraire une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I_n

et jouissant de la même propriété, l'ensemble E est nécessairement compact et fermé.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire de E une suite $A_1, A_2, \ldots$ qui ne converge (ni elle-même, ni aucune suite extraite d'elle-même) vers aucun élément de E. Alors appelons H l'ensemble des éléments de la classe autres que les éléments de cette suite, puis I_k l'ensemble formé par A_k et par les éléments de H. Tout élément de E est intérieur à l'un des I_k (à I_k si c'est A_k, à tous les I_k s'il appartient à H). Et si l'on forme une famille $\mathcal{J}_1$ au moyen d'un nombre fini d'ensembles I_k, elle ne pourra jouir de la même propriété que $\mathcal{J}$ puisqu'elle ne contiendra même pas tous les A_k.

II. — Théorème de Borel-Lebesgue.

Dans le cas des ensembles linéaires, le théorème de Borel a été généralisé par M. Lebesgue au cas où la famille $\mathcal{J}$ n'est plus supposée dénombrable.

Dans ma thèse, j'avais étendu ce nouveau théorème au cas d'un ensemble abstrait appartenant à une classe ($\mathcal{V}$) normale. Il n'est pas nécessaire de donner ici la définition d'une telle classe, car grâce à une remarque de M. T. Hildebrandt [1], on peut en combinant divers théorèmes de ma thèse laisser de côté la condition que la classe soit normale. Je vais montrer ici comment on peut démontrer directement ce résultat au moyen de deux lemmes préliminaires, — dont l'un est celui de Hedrick.

Auparavant je rappelle ce qu'on appelle classe ($\mathcal{V}$).

Une classe d'éléments est une classe ($\mathcal{V}$) lorsque la limite est définie au moyen du *voisinage* de la façon suivante :

On suppose qu'à tout couple A, B d'éléments de la classe correspond un nombre $(A, B) \geqq 0$, appelé *voisinage* de A et de B, tel que :

1° (A, B) n'est nul que si A, B sont identiques;

2° Si A, B, C sont trois éléments variables quelconques, le voisinage (A, B) est toujours infiniment petit quand (A, C) et (B, C) le sont simultanément.

Et la limite est ainsi définie :

---

[1] *Am. Journal of Mathematics*, april 1914.

3° Si (A, A_n) tend vers zéro quand n croît indéfiniment, la suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ converge vers A et inversement.

Les conditions 1°, 3° montrent qu'une classe $(\mathcal{V})$ est une classe $(\mathcal{L})$. C'est aussi une classe $(\mathcal{S})$. Car si A est limite d'une suite d'éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de l'ensemble dérivé d'un ensemble E d'éléments d'une classe $(\mathcal{V})$, A_n sera la limite d'une suite d'éléments $A_n^1, A_n^2, \ldots$ de E. Et alors si l'on prend n puis p assez grands, (A, A_n) et (A_n, A_n^p) seront infiniment petits, donc aussi (A, A_n^p), c'est-à-dire que A appartient aussi à E'.

Ainsi pour une classe $(\mathcal{V})$ le théorème de Borel et sa réciproque s'appliquent. Nous allons démontrer qu'il en est de même de la généralisation de Lebesgue.

Deuxième lemme. — Étant donné un ensemble compact E appartenant à une classe $(\mathcal{V})$, il est possible de former pour chaque valeur du nombre $\varepsilon > 0$ un nombre fini d'ensembles d'éléments de cette classe, soient $K_1, K_2, \ldots, K_q$, tels que le voisinage de deux éléments quelconques appartenant à l'un des ensembles K soit inférieur à ε et que tout élément de E soit intérieur à l'un des ensembles K.

Choisissons d'abord un nombre $\eta > 0$, tel que les conditions $(A, C) < \eta$, $(B, C) < \eta$ entraînent $(A, B) < \varepsilon$. Puis prenons, arbitrairement pour le moment, un nombre $\omega < \eta$.

Soit A_1 un élément quelconque de E. S'il y a un élément de l'ensemble E dont le voisinage avec A_1 soit $\geqq \omega$, appelons-le A_2. S'il y a un élément de E dont les voisinages avec A_1, A_2 soient tous deux $\geqq \omega$, appelons-le A_3. Et ainsi de suite. Nous formons une suite $A_1, A_2, \ldots$ d'éléments de E, tels que le voisinage de deux quelconques d'entre eux est $\geqq \omega$. Mais cette suite est nécessairement finie. Autrement, on pourrait, puisque E est compact, extraire de la suite des A_n une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ convergeant vers un certain élément A. Alors si r et s sont assez grands, (A, A_{n_1}), (A, A_{n_2}) sont infiniment petits, et par suite (A_{n_r}, A_{n_s}) pourrait être inférieur à ω contrairement à l'hypothèse.

Au moyen de la suite finie des A, soit $A_1, A_2, \ldots, A_q$, nous allons former la suite finie d'ensembles $K_1, K_2, \ldots, K_q$, en prenant pour K_p $(p = 1, 2, \ldots, q)$ l'ensemble des éléments de la classe dont

le voisinage avec A_p est inférieur au nombre η. Alors le voisinage de deux éléments de K_p est $< \varepsilon$, d'après le choix même de η.

D'autre part, tout élément B de E est intérieur à l'un des K_p. En effet, dire que la suite des A_q est finie, c'est dire qu'il n'existe aucun élément de E dont les voisinages avec $A_1, \ldots, A_q$ soient tous $\geqq \omega$. Il existe donc un des A, soit A_p tel que $(B, A_p) < \omega$. Alors B appartient à K_p. De plus, il lui est intérieur, si l'on a soin de prendre ω assez petit, — à savoir tel que les conditions $(M, N) < \omega$, $(N, P) < \omega$ entraînent $(M, P) < \eta$ —. Car, dans le cas contraire, B serait limite d'éléments $C_1, C_2, \ldots$, n'appartenant pas à K_p. Mais, pour r assez grand (B, C_r) serait — comme (A_p, B) — inférieur à ω; et par suite (A_p, C_r) serait inférieur à η contrairement à la définition de K_p.

Dans le cas des ensembles linéaires, le théorème précédent est évident. Tout ensemble linéaire compact étant borné, il suffit de prendre pour les K_p des intervalles de longueur $< \varepsilon$.

Théorème de Borel-Lebesgue. — Soit E un ensemble compact et fermé d'éléments d'une classe $(\mathcal{V})$. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles I d'éléments de cette classe, famille telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ jouissant de la même propriété et constituée seulement par un nombre fini d'ensembles I.

En effet, formons les ensembles K_p du lemme précédent. Si le théorème actuel n'était pas exact, il ne le serait pas pour chacune des parties de E contenues dans $K_1, K_2, \ldots, K_q$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{p}$, appelons T_p un des ensembles $K_1, \ldots, K_q$ dont les éléments appartenant à E ne sont pas intérieurs à un nombre fini d'ensembles I.

Soit A_p l'un des éléments de E appartenant à T_p. Puisque E est compact et fermé, on peut extraire de la suite $A_1, A_2, \ldots$ une suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ qui converge vers un élément A de E. Par hypothèse, A est intérieur à un certain I′ des ensembles I. Si l'on démontre que pour une valeur assez grande de i, T_{p_i} a tous ses éléments intérieurs à I′, contrairement à la définition des T_p, on sera arrivé à la contradiction annoncée. Or, dans le cas contraire, il y aurait une infinité de valeurs de i : $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ telles que dans

$T_{p_{i_r}}$ par exemple il y ait un élément C_r non intérieur à P. Mais $(A, A_{p_{i_r}})$ tend vers zéro, $(A_{p_{i_r}}, C_r)$ est par hypothèse inférieur à $\frac{1}{p_{i_r}}$. Donc (A, C_r) tend aussi vers zéro. Et alors A étant intérieur à P; d'après le premier lemme, la suite C_r qui converge vers A aurait ses termes intérieurs à A à partir d'un certain rang contrairement à l'hypothèse.

Remarque. — Il serait intéressant de déterminer — comme nous l'avons fait pour le théorème de Borel — quelle est la classe la plus générale où l'on peut énoncer le théorème de Borel-Lebesgue. Une telle classe est au moins une classe ($\mathcal{S}$), mais elle n'est pas nécessairement une classe ($\mathcal{V}$), comme on en peut facilement fournir des exemples.

SUR LA DÉTERMINATION DES SURFACES PAR UNE RELATION ENTRE DES SEGMENTS DE NORMALES;

Par M. Émile Turrière.

La détermination de courbes planes (C) au moyen d'une relation imposée entre les segments de normale MP et MQ limités au point d'incidence M et aux traces respectives P et Q sur deux axes coordonnés rectangulaires a été effectuée dans quelques cas particuliers :

MP — MQ = o : cercle de centre O;
MP — MQ = const. : hypocycloïde à quatre rebroussements;
MP : MQ = const. : coniques rapportées à leurs axes [1];
MP × MQ = const. : courbes transcendantes panalgébriques de Collignon [2].

---

[1] M. Gino Loria appelle ainsi les courbes transcendantes spéciales qui satisfont à une équation différentielle du premier ordre, algébrique en x, y et y'.

[2] Ed. Collignon, *Problèmes sur les normales aux courbes planes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. 1, 1901, p. 481-508). — M. d'Ocagne, *Au*

D'autres cas particuliers peuvent vraisemblablement avoir été considérés; par exemple, le cas de la courbe transcendante et panalgébrique pour laquelle le conjugué harmonique sur la normale du point courant, par rapport à deux axes rectangulaires, décrit une courbe parallèle, courbe qui s'obtient par la relation

$$\frac{1}{MP} + \frac{1}{MQ} = \text{const.},$$

doit avoir été signalé ([1]); de même pour les courbes définies par les relations simples

$$\overline{MP}^2 \pm \overline{MQ}^2 = \text{const.}$$

Au sujet de ce problème qui, de prime abord, ne semble offrir aucun intérêt spécial, j'ai pourtant obtenu récemment ([2]) un résultat assez curieux, dont je rappellerai l'énoncé :

La détermination des courbes planes, pour lesquelles les segments de normales respectivement limités à deux axes rectangulaires doivent satisfaire à une relation donnée, est équivalente à la quadrature de la courbe figurative précisément représentée par la relation imposée.

Je me propose d'établir une proposition analogue concernant les normales aux surfaces.

L'espace étant rapporté à un système d'axes rectangulaires (Ox, Oy, Oz), la normale à une surface générale (S), en un point quelconque M de cette surface, perce les plans coor-

---

sujet des courbes de M. Collignon (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1902, p. 137-138). — La construction du centre de courbure des courbes de Collignon indiquée par M. M. d'Ocagne est d'ailleurs caractéristique de ces courbes.

([1]) Ces courbes et d'une manière générale toutes les courbes (C) pour lesquelles MP et MQ sont liés involutivement ont d'ailleurs des relations simples avec les courbes de Collignon (par dilatation).

([2]) Ce travail doit paraître prochainement au *Periodico di Matematica* de M. G. Lazzeri. D'autre part, M. G. Teixeira publiera incessamment dans les *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto* un extrait de lettre relatif à cette même proposition et à l'une de ses applications possibles à des familles de courbes algébrico-interscendantes.

donnés Oyz, Ozx et Oxy en trois points qui seront respectivement désignés par X, Y et Z.

La surface (S) est représentée par l'équation

$$(1) \qquad p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi,$$

de son plan tangent en M ; p_1, p_2, p_3 sont les cosinus directeurs de la normale MXYZ. Les segments MX = X, MY = Y, MZ = Z de cette normale sont algébriquement définis par les relations

$$(2) \qquad x = Xp_1, \qquad y = Yp_2, \qquad z = Zp_3,$$

dans lesquelles (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point d'incidence M de cette normale. L'équation du plan tangent à (S) en M se transforme alors en l'égalité

$$(3) \qquad Xp_1^2 + Yp_2^2 + Zp_3^2 = \varpi;$$

la relation

$$(4) \qquad p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz = 0,$$

exprimant que tout déplacement infinitésimal du point (M) sur la surface (S) est normal à la normale (p_1, p_2, p_3) se transforme d'autre part en la relation

$$X\,dp_1^2 + Y\,dp_2^2 + Z\,dp_3^2 = -2[p_1^2\,dX + p_2^2\,dY + p_3^2\,dZ],$$

qui permet de réduire l'expression

$$d\varpi = X\,dp_1^2 + Y\,dp_2^2 + Z\,dp_3^2 + p_1^2\,dX + p_2^2\,dY + p_3^2\,dZ$$

de la différentielle de la distance ϖ de l'origine O au plan tangent à la surface (S) aux seuls termes :

$$(5) \qquad d\varpi = -p_1^2\,dX - p_2^2\,dY - p_3^2\,dZ.$$

Soient alors u et v deux paramètres quelconques de représentation de la surface (Σ) représentative de la relation imposée $f(X, Y, Z) = 0$ entre les segments MX = X, MY = Y, MZ = Z de la normale à (S). En d'autres termes, je suppose que dorénavant X, Y et Z sont des fonctions connues de deux variables u et v admettant les dérivées $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, ... Moyennant

ces notations, on se trouve en présence d'un système de relations :

$$(6)\quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \\ Xp_1^2 + Yp_2^2 + Zp_3^2 = \varpi, \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} p_1^2 + \dfrac{\partial Y}{\partial u} p_2^2 + \dfrac{\partial Z}{\partial u} p_3^2 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} p_1^2 + \dfrac{\partial Y}{\partial v} p_2^2 + \dfrac{\partial Z}{\partial v} p_3^2 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial v}; \end{cases}$$

ce sont quatre équations linéaires en p_1^2, p_2^2, p_3^2. L'élimination de ces trois derniers carrés des cosinus directeurs de la normale donne, par conséquent, une condition

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varpi}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varpi}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \\ -\varpi & X & Y & Z \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre qu'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre définissant la fonction inconnue ϖ des deux variables (u, v). A une intégrale quelconque ϖ de cette équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre correspondra un système linéaire résoluble de quatre équations en p_1^2, p_2^2, p_3^2. La surface cherchée (S) sera dès lors parfaitement déterminée par ses éléments tangentiels. Il résulte des formules (2),

$$x = Xp_1, \qquad y = Yp_2, \qquad z = Zp_3,$$

que la même surface (S) sera aussi très simplement définie au point de vue ponctuel en fonction des paramètres u et v.

La détermination des surfaces (S) *définies par une relation donnée entre les segments* MX, MY et MZ *de normale est donc équivalente à l'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (7).

Cette équation (7) se présente sous une forme assez remarquable. La surface (Σ), représentative de la relation donnée, étant représentée d'une manière générale au moyen de deux paramètres u et v, les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de (Σ) sont

trois fonctions de u et de v définissant une certaine équation linéaire

$$(8) \qquad A\frac{\partial\theta}{\partial u} + B\frac{\partial\theta}{\partial v} + C\theta + D = 0,$$

simultanément satisfaite par X, Y et Z. Les coefficients A, B, C, D sont des fonctions de u, v définies à un facteur arbitraire près par les trois équations du premier degré

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{\partial X}{\partial u} + B\frac{\partial X}{\partial v} + CX + D = 0,\\ &A\frac{\partial Y}{\partial u} + B\frac{\partial Y}{\partial v} + CY + D = 0,\\ &A\frac{\partial Z}{\partial u} + B\frac{\partial Z}{\partial v} + CZ + D = 0.\end{aligned}\right.$$

Il résulte alors de la structure même du déterminant, premier membre de l'équation (7), que celle-ci n'est autre que l'équation

$$(10) \qquad A\frac{\partial\varpi}{\partial u} + B\frac{\partial\varpi}{\partial v} - C\varpi - D = 0.$$

Aucune hypothèse n'a été jusqu'à présent faite relativement au choix du système de courbes (u, v) de référence sur la surface représentative de la relation imposée. Il est possible de choisir convenablement l'un des systèmes de courbes de référence de manière à annuler l'un des coefficients A ou B de l'équation (8).

Soit, en effet, OI l'axe ternaire $X = Y = Z$ de symétrie du trièdre des coordonnées. Je prendrai pour système $v = \text{const.}$ les sections [1] de la surface représentative par les plans pivotant autour de cet axe ternaire OI. Il résulte de ce choix des courbes v (les courbes $u = \text{const.}$ restant quelconques d'ailleurs) que la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ X & Y & Y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

---

[1] Le cas où la surface représentative est un plan passant par l'axe ternaire fait exception. Mais alors la relation imposée est homogène et, d'après le résultat énoncé à la fin de cet article, il suffit de prendre pour ϖ une fonction homogène de degré -1 de (X, Y, Y).

est identiquement satisfaite; B est donc nul et l'équation (8) est réduite à une équation de la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} + M\theta + N = 0. \tag{11}$$

L'équation (10) devient donc

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} - M\varpi - N = 0; \tag{12}$$

cette équation (12) doit être traitée comme une équation différentielle linéaire du premier ordre entre la fonction ϖ et la variable u, la constante d'intégration étant une fonction arbitraire de v.

Dès maintenant le problème est donc ramené à deux quadratures au plus. Mais le fait que (12) admet pour intégrales particulières X, Y et Z entraîne des simplifications importantes et notamment la suppression d'une des quadratures. Les deux relations

$$\frac{\partial X}{\partial u} + MX + N = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} + MY + N = 0,$$

résolues en M et N donnent

$$M = -\frac{\partial \operatorname{Log}(X - Y)}{\partial u}, \qquad N(X - Y) = Y\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Y}{\partial u};$$

l'équation sans second membre

$$\frac{\theta}{\partial u} - M\theta = 0$$

admet donc pour intégrale particulière $\frac{1}{X - Y}$. Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (12) est

$$\varpi = \frac{V + \int\left(Y\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du}{X - Y}, \tag{13}$$

V étant une fonction arbitraire de v. D'où la proposition suivante qui généralise le théorème que j'avais précédemment obtenu pour les courbes planes :

La détermination des surfaces définies par une relation donnée entre les segments MX, MY, MZ *de normale, limités d'une part au point d'incidence de la normale et d'autre part aux traces respectives de cette droite sur les plans coordonnés, ne dépend que d'une quadrature au plus.*

Cette quadrature a une interprétation remarquable : *C'est l'intégrale de quadrature de la section, par un plan quelconque passant par l'axe ternaire de symétrie du trièdre coordonné, de la surface qui représente précisément la relation imposée entre les segments de normale de la surface cherchée.*

Parmi les cas particuliers intéressants, il y a lieu de mentionner d'une manière toute spéciale celui d'une relation homogène entre (X, Y, Z) : c'est une généralisation de la propriété des normales des coniques rapportées à leurs axes.

La surface représentative étant un cône, l'intégrale d'aire considérée est alors nulle et ϖ se réduit au quotient d'une fonction arbitraire de v par $X - Y$; ϖ est donc une fonction homogène de degré -1 des segments X, Y, Z.

On est d'ailleurs conduit à examiner ce cas particulier à l'occasion de l'étude directe de l'équation (10). D est nul et par suite l'équation en ϖ est celle qui admet pour solution une fonction linéaire à coefficients constants des inverses de X, de Y et de Z. Si l'on pose alors

$$\varpi = f(X, Y, Z),$$

on a

$$A\frac{\partial\varpi}{\partial u} + B\frac{\partial\varpi}{\partial v} - C\varpi = \mathop{S}\frac{\partial f}{\partial X}\left(A\frac{\partial X}{\partial u} + B\frac{\partial X}{\partial v}\right) - C\varpi$$
$$= -C\left[X\frac{\partial f}{\partial X} + Y\frac{\partial f}{\partial Y} + Z\frac{\partial f}{\partial Z} + f\right].$$

Dans le cas d'une relation homogène entre les segments de normale, la fonction ϖ *est la fonction homogène de degré* -1 *la plus générale des variables* X, Y, Z.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE BILLE DE BILLARD ;

Par M. B. Globa-Mikhaïlenko.

1. Cette question a été déjà traitée par M. Appell [1] qui a mis en évidence les éléments géométriques du problème. Il désigne par V la vitesse de la molécule de la bille située à l'instant t au point de contact A avec le tapis, par α l'angle que fait cette vitesse avec l'axe fixe $O\xi$ situé dans le plan du tapis, par Ω la composante horizontale de la rotation instantanée de la sphère dans son mouvement autour de son centre de gravité G, par β l'angle de Ω avec $O\xi$, enfin par f et δ les coefficients de frottement et de roulement. Avec ces notations, et en prenant pour axes fixes les axes $O\xi$, $O\eta$ situés dans le plan du tapis et l'axe $O\zeta$ vertical ascendant, M. Appell pose

$$fV = x, \qquad \delta\Omega = y, \qquad \beta - \alpha = \theta;$$
$$f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)g = a, \qquad f\frac{R\delta}{k^2}g = b, \qquad \frac{\delta^2}{k^2}g = c$$

(R étant le rayon de la sphère et k^2 son coefficient d'inertie) et obtient les équations suivantes :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a + b\sin\theta, \\ x\frac{d\alpha}{dt} &= -b\cos\theta, \\ \frac{dy}{dt} &= b\sin\theta - c, \\ y\frac{d\beta}{dt} &= b\cos\theta, \\ \beta - \alpha &= \theta, \end{aligned}\right.$$

dont l'intégration est ramenée à l'intégration d'une seule équation de la forme suivante

$$z' = z^3 - z^2 + \lambda z(1 - z^2)^2$$

qui ne peut pas être intégrée dans le cas général.

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1911.

2. Nous nous proposons ici de chercher les solutions approchées du problème, en supposant le coefficient de frottement de roulement δ très petit. Nous montrerons d'abord que les intégrales des équations (1) sont développables en séries suivant les puissances croissantes de δ et nous formerons les équations qui permettront de calculer autant de coefficients de ces séries que l'on voudra.

Assurons-nous d'abord que les intégrales des équations (1) sont développables suivant les puissances de δ. Pour cela écrivons ces équations comme il suit :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -a + \delta b' \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)],\\ &\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\delta b' \cos[\theta_0 + (\theta - \theta_0)]}{x_0 + (x - x_0)};\\ &\frac{d\Omega}{dt} = b' \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)] - \delta c',\\ &\frac{d\beta}{dt} = \frac{b' \cos[\theta_0 + (\theta - \theta_0)]}{\Omega_0 + (\Omega - \Omega_0)},\\ &\beta - \alpha = \theta, \end{aligned}\right.$$

où l'on pose

$$b' = f\frac{R}{k^2}g, \qquad c' = \frac{g}{k^2},$$

et où l'on désigne par $x_0, \alpha_0, \beta_0, \Omega_0, \theta_0$ les valeurs pour $\delta = 0$ des nombres x, α, β, Ω, θ.

Il suffit maintenant d'appliquer au système (2) le théorème général que M. Picard donne dans son *Traité d'Analyse* (t. III, p. 162) et dont voici l'énoncé :

« Soit le système d'équations

$$(S)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 x_2 \ldots x_n, t, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que, pour $\mu = 0$, on ait l'intégrale

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t)$$

continue de $t = 0$ à $t = t_0$. De plus les X_i sont supposées développables en séries ordonnées suivant les puissances de μ et $(x_i - \varphi_i t)$ pour toute valeur de t, entre 0 et t_0, les coefficients de

ces développements étant, bien entendu, des fonctions continues de t.

» Dans ces conditions les intégrales de (S) prenant respectivement pour $t = 0$ les valeurs

$$\varphi_1(0) + x_1^0, \quad \varphi_2(0) + x_2^0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(0) + x_n^0$$

seront continues de 0 à t_0 et développables suivant les puissances de x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 et μ pourvu que ces grandeurs aient des modules suffisamment petits. »

Or, le système (2) vérifie complètement les conditions de cet énoncé. De plus, il est facile de voir que les quantités x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 sont identiquement nulles dans notre problème, car, quel que soit δ, les conditions initiales restent toujours les mêmes. Donc V, α, β, Ω sont développables en séries suivant les puissances croissantes de δ, pourvu que cette dernière quantité soit suffisamment petite ; et par suite les coordonnées du centre de la sphère et les composantes de la rotation instantanée autour de son centre sont développables en séries de même nature.

3. Cela posé, établissons les équations de mouvement de la sphère sous leur forme classique.

Menons par le centre G de la sphère les axes $Gxyz$ parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de la sphère, p, q, r les composantes de la rotation instantanée sur les axes mobiles $Gxyz$, m la masse de la sphère, mk^2 son moment d'inertie par rapport au diamètre.

La liaison s'exprime par la condition

$$\zeta = R = \text{const.}$$

Les forces qui agissent sont :

a. La pesanteur $(0, 0, -mg)$ appliquée au centre de la sphère ;

b. La réaction inconnue du plan (mX, mY, N) appliquée au point de contact de la sphère avec le plan $\xi\eta$;

c. Le couple du frottement de roulement, dont le moment est égal à δN et qui est dirigé dans le sens inverse de la projection horizontale ω de la rotation instantanée de la sphère.

Avec ces notations les cosinus directeurs du moment de frotte-

ment de roulement sont

$$\frac{-p}{\omega}, \quad \frac{-q}{\omega}, \quad 0; \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2},$$

et les moments de cette force par rapport aux axes $Gxyz$ sont

$$-\frac{pN\delta}{\omega}, \quad -\frac{qN\delta}{\omega}, \quad 0.$$

Maintenant nous pouvons écrire les équations du mouvement

$$(3) \qquad m\xi'' = mX, \qquad m\eta'' = mY, \qquad m\zeta'' = -mg + N = 0;$$

d'où

$$N = mg.$$

Ensuite

$$(4) \qquad \begin{cases} mk^2 p' = RmY - \dfrac{pN\delta}{\omega}, \\ mk^2 q' = -RmX - \dfrac{qN\delta}{\omega}, \\ mk^2 r' = 0, \end{cases}$$

en supposant le coefficient de frottement de pivotement nul. La dernière équation donne ainsi

$$r = r_0 = \text{const.}$$

A ces équations nous devons ajouter encore la condition que la réaction horizontale du plan est égale à fN, ce qui nous donne

$$(5) \qquad X^2 + Y^2 = f^2 g^2.$$

Et enfin que cette réaction est dirigée en sens inverse de la vitesse du point de contact de la sphère avec le plan horizontal. Or, les projections de cette vitesse étant

$$u = \xi' - qR, \qquad v = \eta' + qR, \qquad 0,$$

la condition cherchée est

$$(6) \qquad (\xi' - qR)Y = (\eta' + pR)X.$$

Ces six équations : (3), (4), (5) et (6) nous déterminent complètement les six valeurs inconnues

$$(7) \qquad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q, \quad X, \quad Y.$$

4. Pour $\delta = 0$ ces six fonctions prennent des valeurs bien déterminées, que nous appellerons

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad p_0, \quad q_0, \quad X_0, \quad Y_0$$

et qui sont les fonctions connues du temps, prenant pour $t = 0$ les valeurs initiales constantes

$$\xi_0^0, \quad \eta_0^0, \quad p_0^0, \quad q_0^0, \quad X_0^0, \quad Y_0^0.$$

Nous savons que, pour δ suffisamment petit, les fonctions (7) peuvent être représentées par des séries entières en δ de la forme suivante

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 + \xi_1 \delta + \xi_2 \delta^2 + \ldots + \xi_n \delta^n + \ldots, \\ \eta = \eta_0 + \eta_1 \delta + \eta_2 \delta^2 + \ldots + \eta_n \delta^n + \ldots, \\ p = p_0 + p_1 \delta + p_2 \delta^2 + \ldots + p_n \delta^n + \ldots, \\ q = q_0 + q_1 \delta + q_2 \delta^2 + \ldots + q_n \delta^n + \ldots, \\ X = X_0 + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots + X_n \delta^n + \ldots, \\ Y = Y_0 + Y_1 \delta + Y_2 \delta^2 + \ldots + Y_n \delta^n + \ldots, \end{cases}$$

où ξ_i, η_i, p_i, q_i, X_i, Y_i sont des fonctions inconnues du temps, s'annulant pour $t = 0$, car évidemment les conditions initiales sont indépendantes de δ.

Portons maintenant ces expressions dans les équations (3), (4), (5) et (6) et, en identifiant les coefficients de δ, nous obtiendrons les équations qui nous permettront de calculer autant de termes des séries (8) que nous voudrons.

Nous avons d'abord

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_0'' + \xi_1'' \delta + \xi_2'' \delta^2 + \ldots = X_0 + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots, \\ \eta_0'' + \eta_1'' \delta + \eta_2'' \delta^2 + \ldots = Y_0 + Y_1 \delta + Y_2 \delta^2 + \ldots : \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} k^2(p_0' + p_1' \delta + p_2' \delta^2 + \ldots) = \quad R(Y_0 + Y_1 \delta + Y_2 \delta^2 + \ldots) - g \delta \dfrac{p}{\omega}, \\ k^2(q_0' + q_1' \delta + q_2' \delta^2 + \ldots) = - R(X_0 + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots) - g \delta \dfrac{q}{\omega}; \end{cases}$$

$$(11) \quad (X_0 + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots)^2 + (Y_0 + Y_1 \delta + Y_2 \delta^2 + \ldots)^2 = f^2 g^2 :$$

$$(12) \quad \begin{aligned} &[(\xi_0' + \xi_1' \delta + \xi_2' \delta^2 + \ldots) \\ &\qquad - R(q_0 + q_1 \delta + q_2 \delta^2 + \ldots)](Y_0 + Y_1 \delta + Y_2 \delta^2 + \ldots) \\ &= [(\eta_0' + \eta_1' \delta + \eta_2' \delta^2 + \ldots) \\ &\qquad + R(p_0 + p_1 \delta + p_2 \delta^2 + \ldots)](X_0 + X_1 \delta + X_2 \delta^2 + \ldots). \end{aligned}$$

Les deux équations (9) nous donnent immédiatement

$$(13) \qquad \xi_i'' = X_i, \qquad \eta_i'' = Y_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

5. Mais, avant d'aller plus loin, il nous faut développer

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2}$$

suivant les puissances de δ.

On a

$$p^2 = (p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots)^2 = p_0^2 + 2\sum_1^\infty p_0 p_i \delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty p_i p_k \delta^{i+k},$$

$$q^2 = (q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots)^2 = q_0^2 + 2\sum_1^\infty q_0 q_i \delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty q_i q_k \delta^{i+k},$$

et nous pouvons écrire

$$\omega^2 = p^2 + q^2 = \omega_0^2 + f(\delta),$$

où l'on pose

$$\omega_0^2 = p_0^2 + q_0^2,$$

$$f(\delta) = 2\sum_1^\infty (p_0 p_i + q_0 q_i)\delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty (p_i p_k + q_i q_k)\delta^{i+k},$$

ou en développant

$$\begin{aligned} f(\delta) = \; & 2(p_0 p_1 + q_0 q_1)\delta + [2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + p_1^2 + q_1^2]\delta^2 \\ & + [2(p_0 p_3 + q_0 q_3) + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)]\delta^3 + \ldots \\ & + \text{les termes d'ordre supérieur en } \delta. \end{aligned}$$

Comme $f(\delta)$ est petit lorsque δ est petit, et s'annule avec δ, nous pouvons écrire

$$\omega = [\omega_0^2 + f(\delta)]^{\frac{1}{2}} = \omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^{-1} f(\delta) - \frac{1}{8}\omega_0^{-3}[f(\delta)]^2 + \frac{1}{16}\omega_0^{-5}[f(\delta)]^3 + \ldots.$$

Et en remplaçant $f(\delta)$ par sa valeur

$$\begin{aligned} \omega = \; & \omega_0 + \omega_0^{-1}(p_0 p_1 + q_0 q_1)\delta \\ & + \left\{ \frac{\omega_0^{-1}}{2}[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + p_1^2 + q_1^2] - \frac{\omega_0^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^2 \right\} \delta^2 \\ & + \left\{ \omega^{-1}[(p_0 p_3 + q_0 q_3) + (p_1 p_2 + q_1 q_2)] \right. \\ & \quad - \frac{\omega^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + (p_1^2 + q_1^2)] \\ & \qquad \left. + \frac{\omega^{-5}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^3 \right\} \delta^3 + \ldots \\ & + \text{les termes supérieurs en } \delta. \end{aligned}$$

Ou encore

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \delta + \omega_2 \delta^2 + \omega_3 \delta^3 + \ldots$$

en posant

$$(14)\quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0^{-1}(p_0 p_1 + q_0 q_1), \\ \omega_2 = \dfrac{\omega_0^{-1}}{2}[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + (p_1^2 + q_1^2)] - \dfrac{\omega_0^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^2, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

6. Reprenons maintenant notre calcul. En portant l'expression trouvée de ω dans les équations (10), on a

$$\begin{aligned} &[k^2(p'_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots) - R(Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots)] \\ &\times(\omega_0 + \omega_1\delta + \omega_2\delta^2 + \ldots) + g\delta(p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots) = 0, \\ &[k^2(q'_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots) + R(X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots)] \\ &\times(\omega_0 + \omega_1\delta + \omega_2\delta^2 + \ldots) + g\delta(q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots) = 0. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de δ^i et en remplaçant les ω_i par leurs valeurs, on trouve, après quelques transformations, les équations suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} p'_0 = \dfrac{RY_0}{k^2}, \\ p'_1 = \dfrac{RY_1\omega_0 - gp_0}{k^2\omega_0} = \dfrac{RY_1}{k^2} - \dfrac{g}{k^2\omega_0}p_0, \\ p'_2 = \dfrac{RY_2}{k^2} - \dfrac{gp_1\omega_0 - \dfrac{gp_0}{\omega_0}(p_0p_1 + q_0q_1)}{k^2\omega_0^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} q'_0 = -\dfrac{RX_0}{k^2}, \\ q'_1 = -\dfrac{RX_1}{k^2} - \dfrac{g}{k^2\omega_0}q_0, \\ q'_2 = -\dfrac{RX_2}{k^2} - \dfrac{gq_1\omega_0 + \dfrac{gq_0}{\omega_0}(p_0p_1 + q_0q_1)}{k^2\omega_0^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations nous permettent, en connaissant les X_i et Y_i, de calculer de proche en proche tous les coefficients de p et de q à l'aide d'une seule intégration.

Passons maintenant aux équations (11). L'identification des coefficients nous donne immédiatement

$$(17)\qquad \begin{cases} X_0^2 + Y_0^2 = f^2 \varrho^2, \\ X_0 X_1 + Y_0 Y_1 = 0, \end{cases}$$

et généralement

$$\sum_{i,k_1} (X_i X_k + Y_i Y_k) = 0 \qquad (i + k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ces équations nous permettront de calculer tous les X_i, en connaissant les Y_i sans aucun signe d'intégration. Le problème se ramène donc au calcul des Y_i. Les équations qui nous permettront de le faire seront données par les équations (12). L'identification des coefficients donne

$$(18)\qquad \begin{cases} (\xi'_0 - R q_0) Y_0 = (\eta'_0 + R p_0) X_0, \\ (\xi'_0 - R q_0) Y_1 + (\xi'_1 - R q_1) Y_0 = (\eta'_0 + R p_0) X_1 + (\eta'_1 + R p_1) X_0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\Sigma (u_i Y_k - v_i X_k) = 0 \qquad (i + k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où l'on pose

$$u = u_0 + u_1 \delta + u_2 \delta^2 + \ldots,$$
$$v = v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \ldots,$$

étant

$$u_i = \xi'_i - R q_i, \qquad v_i = \eta'_i + R p_i.$$

En dérivant la première des équations (18) nous avons, en tenant compte d'elle-même et en remplaçant ξ''_0, η''_0, q'_0, p'_0 par leurs valeurs tirées de (13), (15) et (16),

$$\frac{X'_0}{Y'_0} = \frac{X_0}{Y_0},$$

d'où

$$\frac{X_0}{Y_0} = \text{const.}$$

La réaction du plan conserve sa direction si $\delta = 0$, de même que la vitesse du point de contact de la sphère. C'est le résultat connu d'avance.

7. Faisons maintenant un choix d'axes qui nous permettra de simplifier notablement nos équations. Prenons pour l'axe $O\xi$ l'axe parallèle à la vitesse initiale du point de contact de la sphère, et nous aurons

$$(19)\qquad \begin{cases} u_0 = u_0^0, & v_0 = 0, \\ X_0 = -fg, & Y_0 = 0. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans les équations (13), (15) et (16), on retrouve d'abord la solution classique où l'on néglige le coefficient δ :

$$(20)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \xi_0^0 + \xi_0'^0\, t - \dfrac{fg}{2} t^2, \\ \eta_0 = \eta_0^0 + \eta_0'^0\, t, \end{cases}$$

$$(21)\qquad \begin{cases} p_0 = p_0^0 = \text{const.}, \qquad q_0 = q_0^0 + \dfrac{f\mathrm{R}}{k^2} gt = q_0^0 + \dfrac{5fg}{2\mathrm{R}} t, \\ u_0 = \xi_0' - q_0 \mathrm{R} = u_0^0 - \dfrac{7}{2} fgt, \qquad v_0 = 0. \end{cases}$$

Les équations (17) donnent ensuite

$$(22)\qquad \begin{cases} X_1 = 0, \\ 2fg X_2 = Y_1^2, \\ fg X_3 = Y_1 Y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En connaissant les valeurs des Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), on trouvera, à l'aide de ces équations, la valeur de X_{i+1}.

Enfin les équations (18) s'écrivent

$$(23)\qquad \begin{cases} (\xi_0' - \mathrm{R} q_0) Y_1 = (\eta_1' + \mathrm{R} p_1) X_0, \\ (\xi_0' - \mathrm{R} q_0) Y_2 + (\xi_1' - \mathrm{R} q_1) Y_1 = (\eta_0' + \mathrm{R} p_0) X_2 + (\eta_2' + \mathrm{R} p_2) X_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

En dérivant la première de ces équations par rapport à t, nous avons, en remplaçant ξ_0'', η_1'', q_0', p_1' par leurs valeurs tirées de (13), (15) et (16),

$$(\xi_0' - \mathrm{R} q_0) Y_1' = -\frac{\mathrm{R} g p_0 X_0}{k^2 \omega_0}.$$

D'où l'on tire

$$Y_1 = -\int_0^t \frac{\mathrm{R} g p_0 X_0}{k^2 \omega_0 (\xi_0 - \mathrm{R} q_0)} dt.$$

Et finalement

$$(24)\qquad Y_1 = -\frac{R g X_0 p_0^0}{k^2}\int_0^t \frac{dt}{\omega_0(\xi_0 - R q_0)}.$$

En employant le même procédé avec la deuxième des équations (23), elle nous donne

$$(\xi_0 - R q_0) Y_2 = -\frac{R g q_0}{k^2 \omega}\left[Y_1 + \frac{(p_1 q_0 - p_0 q_1) X_0}{\omega_0^2}\right],$$

et ainsi de suite. On voit clairement que tous les Y_i peuvent être calculés de proche en proche par des quadratures. Les équations (22) nous donneront les X_i par le calcul algébrique, les équations (15) et (16) nous donneront p_i et q_i par une nouvelle quadrature, enfin les équations (13) nous permettront de calculer ξ_i et η_i par deux quadratures.

Le problème est donc ramené aux seules quadratures.

8. *Première approximation.* — Lorsqu'on néglige le frottement de roulement, on se trouve dans le cas classique et l'on obtient la solution donnée par les équations (20) et (21). Nous voulons tenir compte de ce frottement de roulement, mais nous supposons que son coefficient δ est assez petit pour pouvoir négliger son carré et les puissances supérieures. Nous aurons ainsi pour la première approximation

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \delta\xi_1, & \eta &= \eta_0 + \delta\eta_1, \\ X &= X_0 - \delta X_1, & Y &= Y_0 + \delta Y_1, \\ p &= p_0 + \delta p_1, & q &= q_0 + \delta q_1. \end{aligned}$$

En se reportant aux résultats précédents nous avons

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ Y_1 &= \frac{5 f g^2 p_0^0}{2 R^2}\int_0^t \frac{dt}{\omega_0\left(u_0^0 - \frac{7}{2} f g t\right)}. \end{aligned}$$

Or

$$\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} = \sqrt{b^2 t^2 + 2 b q_0^0 t + \omega_0^{0\,2}},$$

en posant

$$b = \frac{5 f g}{2 R}, \qquad \omega_0^0 = p_0^{0\,2} + q_0^{0\,2}.$$

L'intégration faite, on trouve

$$Y_1 = \frac{5}{7}\frac{g}{RA}p_0^0\left\{L\frac{\omega_0 - bt + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + A}{\omega_0 - bt + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} - A} - L\frac{\omega_0^0 + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + A}{\omega_0^0 + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} - A}\right\}.$$

A étant une constante essentiellement positive, ne dépendant que des conditions initiales du problème et donnée par la formule

$$A = +\sqrt{\left(\frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + q_0^0\right)^2 + p_0^{02}}.$$

Le calcul effectif de ξ_1, η_1, p_1, q_1, quoique laborieux, ne présente aucune difficulté, mais, en revanche, les expressions obtenues sont tellement compliquées que leur analyse directe ne donne pas d'indications sur l'influence du frottement de roulement sur le mouvement de la sphère. Tâchons de déterminer cette influence directement, sans calcul.

Remarquons d'abord que, d'après (13), $\xi_1'' = 0$ et comme ξ_1 et ξ_1' débutent par zéro,

$$\xi_1 = 0.$$

Ensuite

$$\eta_1'' = Y_1,$$

et comme η_1 et η_1' débutent par zéro, elles sont du signe de Y_1 et si Y_1 conserve son signe, η_1' et η_1 conservent le même signe et croissent en valeur absolue.

Cherchons maintenant le signe de Y_1. La dérivée de la quantité qui est sous le signe de logarithme est du signe de l'expression

$$-(\omega_0' - b)2A = 5A\frac{fg}{R}\left(1 - \frac{q_0}{\omega_0}\right),$$

qui est essentiellement positive.

Par conséquent le logarithme, partant de zéro, reste toujours positif et croît en valeur absolue. Donc Y_1 est du signe de p_0^0 et croît en valeur absolue.

Pour la commodité du langage, choisissons pour origine des axes fixes le point de contact de la sphère avec le plan horizontal pour $t = 0$.

Ceci posé, et en remarquant que

$$(\eta')_0^0 = \eta_0'^0 = -Rp_0^0,$$

nous pouvons dire que pour $p_0^0 > 0$, et en négligeant δ, la trajectoire tout entière est située du côté des η négatifs et pour $p_0^0 < 0$ du côté des η positifs. Mais comme, dans le premier cas, η_1 est positif et, dans le deuxième négatif, nous pouvons affirmer que, dans tous les cas, le frottement de roulement tend à rapprocher la trajectoire de l'axe $O\xi$.

Par conséquent, si la vitesse initiale du centre de la sphère fait un angle aigu avec l'axe $O\xi$ ($\zeta_0^0 > 0$), le frottement de roulement redresse la trajectoire et, dans le cas contraire, ($\xi_0'^0 < 0$), il la rend plus courbe.

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $a^m + b^m = c^m$, EN NOMBRES ENTIERS DIFFÉRENTS DE ZÉRO, QUAND m EST FRACTIONNAIRE, ET SUR UNE ÉQUATION ANALOGUE PLUS GÉNÉRALE;

Par M. Edmond Maillet.

I. Nous nous occupons ici principalement de l'équation indéterminée

$$a^m + b^m = c^m \tag{1}$$

en nombres entiers [1] tous $\neq 0$, dans le cas où $m = \frac{n}{p}$ est un nombre rationnel > 0, n et p étant premiers entre eux, et $p > 1$. Cette équation a déjà été envisagée [2]; mais il ne semble pas que des résultats un peu étendus aient été obtenus à son sujet pour $n > 2$; un Mémoire annoncé par M. Dutordoir n'a jamais été publié à notre connaissance. Lorsque n est égal à 1 ou 2, l'équation (1) admet les solutions évidentes connues

$$a = a_1^p, \qquad b = b_1^p, \qquad c = c_1^p,$$

où a_1, b_1, c_1 sont les systèmes d'entiers $\neq 0$ en nombre infini

---

(1) Sauf indication contraire, cette expression et celle de nombre rationnel s'appliqueront toujours à des nombres entiers ou rationnels ordinaires ou naturels.

(2) *Voir*, par exemple, Dutordoir, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XVII, 1893, p. 81; Cashmore, *Fermat's fast theorem*, Londres, 1916.

satisfaisant à

$$(1\ bis) \qquad a_1^n + b_1^n = c_1^n.$$

Le théorème que l'on peut considérer comme vraisemblable et que nous établirons, par exemple, pour $m > 1$ et dans d'autres cas, c'est que l'équation (1), n étant quelconque, équivaut à l'équation (1 *bis*), qui fait l'objet du dernier théorème de Fermat, pour chaque valeur de n, et présente, par suite, comme elle, de nombreux cas certains d'impossibilité pour $n > 2$.

Il y a un théorème analogue pour l'équation indéterminée $a^{m_1} + b^{m_2} = c^{m_3}$, où les $m_i (i = 1, 2, 3)$ sont des nombres rationnels > 0, a, b, c étant des entiers premiers entre eux deux à deux : nous l'établissons, par exemple, quand un des m_i est > 1. Enfin, il y en a un aussi pour l'équation analogue à (1) avec m rationnel négatif et égal à $-m_1$, équation qui équivaut à l'équation (1) pour $m = m_1$.

II. Envisageons l'ensemble des entiers et des racines $p^{\text{ièmes}}$ d'entiers. L'ensemble ou corps formé à l'aide de ces nombres par addition, soustraction ou multiplication est composé de nombres entiers algébriques; en effet, les entiers ordinaires et leurs racines $p^{\text{ièmes}}$ sont des entiers algébriques; de plus, la somme, la différence, le produit de deux entiers algébriques sont des entiers algébriques [1].

Rappelons encore que, si α, β, γ sont des entiers algébriques tels que γ divise α et β, γ divise aussi $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$.

Pour déterminer les solutions de (1), on peut toujours supposer a, b, c premiers entre eux deux à deux.

Si, en effet, les entiers ordinaires a et b par exemple sont divisibles par le nombre premier ordinaire λ, on a

$$a = \lambda a', \qquad b = \lambda b', \qquad c^{\frac{n}{p}} = \lambda^{\frac{n}{p}}\left(a'^{\frac{n}{p}} + b'^{\frac{n}{p}}\right) = \lambda^{\frac{n}{p}}\delta,$$

où δ est un entier algébrique; λ divise c, car δ^p est un entier ordinaire. Le raisonnement est analogue quand on suppose que c et.

---

[1] Dirichlet. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3e édition, 1879, p. 452 et suiv.

par exemple, a ont un diviseur premier commun λ_1 : celui-ci divise b. Si donc (1) a une solution en entiers a, b, c ayant le plus grand commun diviseur d, soit $a = a''d$, $b = b''d$, $c = c''d$; a'', b'', c'' sont premiers entre eux deux à deux et solutions de (1); inversement toute solution a'', b'', c'' de (1) en donne une solution a, b, c, quel que soit d.

III. Envisageons donc l'équation (1) avec a, b, $c \neq 0$ et premiers entre eux deux à deux. On a

$$(2) \quad c^n = (a^m + b^m)^p = a^n + b^n + C_p^1 a^m b^{n-m} + \ldots + C_p^\alpha a^{m\alpha} b^{n-m\alpha} + \ldots.$$

Soient λ un nombre premier qui divise a, mais non p, λ^k la plus haute puissance de λ qui divise a; on a

$$(3) \qquad c^n - a^n - b^n = C_p^1 a^m b^{n-m} + \ldots:$$

dans le deuxième membre, les termes non écrits sont tous divisibles par a^{2m}, par suite par λ^{2mk}: le premier terme l'est (1) par λ^{mk} et non par $\lambda^{\frac{n_1}{p}}$ avec n_1 entier $> kn$.

Donc $c^n - a^n - b^n$ est divisible par λ^{km} et non par $\lambda^{km + \frac{1}{p}}$; il en résulte [note (1) précédente, 3°] $kn = hp$ et, puisque n est premier à p, $k = k'p$ (k' entier).

Ainsi, l'exposant de la plus haute puissance de tout diviseur premier de a, lorsque ce diviseur est premier à p, est multiple de p: a est de la forme $a = a_1^p a_2$, où a_1 est premier à p, tandis que les diviseurs premiers de a_2 divisent tous p. On a, de même,

---

(1) Soient A, B, C, θ, θ_1 des entiers > 0; δ, δ_1, δ_2 des entiers algébriques :

1° Si $A^{\frac{\theta_1}{p}} = B^{\frac{\theta}{p}}.\delta$, B^θ divise A^{θ_1} et réciproquement; on le voit de suite en remarquant que δ^p est un entier ordinaire: quand $\theta = \theta_1$, B divise A.

2° Si $\delta_1 = A^{\theta_m} B^{\frac{\theta_1}{p}} C$, soit λ^k la plus haute puissance du nombre premier λ, premier à B et C, qui divise A ; la plus haute puissance de $\lambda^{\frac{1}{p}}$ qui divise δ_1 est $\lambda^{k\theta_m}$; on le voit de suite en considérant δ_1^p.

3° Si $A = \lambda^{\theta_m}.\delta_2$, où δ_2 n'est pas divisible par $\lambda^{\frac{1}{p}}$, on a $\theta n = hp$ (h entier). On le voit en envisageant δ_2^p, qui est un entier premier à λ.

$b = b_1^p b_2$, où les diviseurs premiers de b_2 divisent p, tandis que b_1 est premier à p.

D'autre part, d'après (1),

$$(4) \qquad b^n = (c^m - a^m)^p = c^n + (-1)^p [a^n - C_p^1 c^m a^{n-m} + \ldots];$$

en raisonnant sur c et cette formule comme on l'a fait sur a et la formule (2), on voit que $c = c_1^p c_2$, où les diviseurs premiers de c_2 divisent p, tandis que c_1 est premier à p. On obtient alors ce résultat :

Théorème I. — *La résolution de l'équation* (1) *équivaut à celle de l'équation*

$$(5) \qquad a_2^m a_1^n + b_2^m b_1^n = c_2^m c_1^n,$$

où a_1, b_1, c_1, premiers deux à deux, sont premiers à p, tandis que a_2, b_2, c_2, premiers aussi deux à deux, n'ont d'autres diviseurs premiers que ceux de p.

IV. Reprenons la formule (3), en désignant maintenant par λ un diviseur premier commun de p et de a, par suite de a_2. Soient λ^{k_1} et λ^k les plus hautes puissances de λ qui divisent p et a.

Nous avons besoin, pour la suite, de savoir déterminer la plus haute puissance de λ qui divise

$$C_p^\alpha = \frac{p!}{\alpha!\,(p-\alpha)!}, \qquad \alpha = \frac{p}{2},$$

au moins dans des cas étendus. Soit

$$\alpha = A_0 \lambda^i + A_1 \lambda^{i-1} + \ldots + A_i, \qquad A_0 > 0, \qquad 0 \leqq A_j < \lambda \qquad (j = 0, 1, \ldots, i),$$

le nombre α écrit dans le système de numération de base λ. On sait [1], ou l'on voit facilement, que la plus haute puissance de λ qui divise $\alpha!$ est λ^{e_α}, avec

$$(6) \qquad e_\alpha = \frac{\alpha - (A_0 + A_1 + \ldots + A_i)}{\lambda - 1}.$$

Soit λ^{f_α} la plus haute puissance de λ qui divise C_p^α; proposons-

---

[1] *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (J. Molk), t. I, vol. 3, fasc. 1, p. 4.

nous de trouver, dans la suite $f_1, f_2, \ldots$, des f_α d'indices croissants, la suite S de ceux qui sont plus petits que les nombres analogues d'indice plus petit.

Admettons que α soit divisible par λ^s et non par λ^{s+1} ($s = 0, 1, 2, \ldots$). On a, s_1 étant $\leqq s$,

$$C_p^{\alpha+\lambda^{s_1}} = C_p^\alpha \frac{N}{D},$$

avec

$$N = (p-\alpha)\ldots(p-\alpha-\lambda^{s_1}+1), \qquad D = (\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda^{s_1}).$$

N et D sont chacun le produit de λ^{s_1} nombres consécutifs; dans un pareil produit il y a un facteur φ_{s_1} divisible par λ^{s_1} et qui peut être divisible par une puissance de λ d'exposant supérieur à s_1, $\lambda - 1$ autres facteurs divisibles par λ^{s_1-1} et non par λ^{s_1}, $\lambda^2 - \lambda$ autres facteurs divisibles par λ^{s_1-2} et non par $\lambda^{s_1-1}, \ldots$. Soit

$$\sigma = s_1 + (\lambda-1)(s_1-1) + (\lambda^2-\lambda)(s_1-2) + \ldots = \frac{\lambda^{s_1}-1}{\lambda-1}.$$

D, divisible par λ^σ ne pourra l'être par $\lambda^{\sigma+1}$ que si le facteur $\varphi_{s_1} = \alpha + \lambda^{s_1}$ de D l'est par λ^{s_1+1}, ce qui exige $s = s_1$; si donc $s > s_1$, ou si $\alpha + \lambda^s$, avec $s = s_1$, n'est pas divisible par λ^{s+1}, N étant divisible par λ^σ, on a

$$f_{\alpha+\lambda^{s_1}} \geqq f_\alpha.$$

Faisant successivement $s = 0, 1, 2, \ldots$, on voit que les valeurs de f_α appartenant à la suite S font partie des valeurs

$$g_s = f_{\lambda^s} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots);$$

car si le nombre $\nu = \nu_1 \lambda^s$, avec ν_1 premier à λ et > 1, f_ν ne fait pas partie de S, puisque $f_\nu \geqq f_{\nu-\lambda^s}$, que $\nu_1 - 1$ soit ou non divisible par λ. On a

$$g_s = e_p - e_\alpha - e_{p-\alpha} \qquad (\alpha = \lambda^s),$$

$$e_\alpha = \frac{\alpha-1}{\lambda-1} = \frac{\lambda^s-1}{\lambda-1};$$

si le nombre p s'écrit

$$p = \lambda^{k_1}(B_0\lambda^t + B_1\lambda^{t-1} + \ldots + B_t) \qquad (B_0 > 0,\ B_t > 0),$$

dans le système de numération de base λ, on a

$$e_p = \frac{p - (B_0 + \ldots + B_t)}{\lambda - 1};$$

quant à $p-\alpha$, si $s \geqq k_1$ et si le coefficient B_{k_1+t-s} de λ^s dans p est $\neq 0$, on a

$$(7) \qquad e_{p-\alpha} = \frac{p - \lambda^s - (B_0 + \ldots + B_t - 1)}{\lambda - 1};$$

dans les autres cas, posant $B_{t+1} = \ldots = B_{t+k_1} = 0$, soit B_{k_1+t-u} le premier des coefficients

$$B_{k_1+t-s-1}, \quad B_{k_1+t-s-2}, \quad \ldots,$$

qui soit $\neq 0$; $p-\alpha$ s'écrit dans le système de numération de base λ

$$p - \alpha = B_0 \lambda^{k_1+t} + \ldots + (B_{k_1+t-u} - 1)\lambda^u + (\lambda - 1)\lambda^{u-1} + \ldots$$
$$+ (\lambda - 1)\lambda^s + B_{k_1+t-s+1}\lambda^{s-1} + \ldots$$

et

$$(8) \qquad e_{p-\alpha} = \frac{p - \lambda^s - (B_0 + \ldots + B_t - 1) - (\lambda - 1)(u - s)}{\lambda - 1}.$$

On a ainsi

$$(9) \qquad \begin{cases} g_s = 0 & \text{avec la formule (7),} \\ g_s = u - s & \text{avec la formule (8).} \end{cases}$$

Par conséquent :

1° Quand $s < k_1$, la seconde formule (9) ayant lieu,

$$k_1 + t - u = t, \qquad u = k_1, \qquad g_s = k_1 - s;$$

2° Quand $s = k_1$,

$$g_s = 0, \qquad \text{car} \qquad B_t \neq 0:$$

3° Quand $s > k_1$,

$$g_s = 0 \qquad \text{si} \qquad B_{k_1+t-s} \neq 0$$

et

$$g_s = u - s \leqq k_1 + t - s < t \qquad \text{si} \qquad B_{k_1+t-s} = 0.$$

V. Ceci posé, l'équation (3) a pour terme général dans le deuxième membre $C_p^\alpha a^{m\alpha} b^{n-m\alpha}$, lequel est divisible par λ^{d_α} et non par $\lambda^{d_\alpha + \frac{1}{p}}$, si

$$d_\alpha = f_\alpha + km\alpha.$$

Cherchons la plus petite valeur d_{α_1} de d_α; $km\alpha$ croissant avec α, f_{α_1} sera plus petit que f_α quand $\alpha < \alpha_1$ et fera partie de la suite S;

d_{α_1} sera un des nombres

$$G_s = g_s + km\lambda^s. \tag{10}$$

Or $G_{k_1} = km\lambda^{k_1}$ est plus petit que G_s pour $s > k_1$ (au cas où l'on peut avoir $s > k_1$); α_1 correspond donc à un des nombres (10) avec $s \leqq k_1$, pour lesquels

$$G_s = k_1 - s + km\lambda^s. \tag{11}$$

Considérons dans (11) G_s comme fonction continue de s; on a

$$G'_s = km\lambda^s L\lambda - 1, \qquad G''_s = km\lambda^s (L\lambda)^2 > 0.$$

Nous nous bornerons à conclure que G'_1 est positif et plus petit que G'_s, pour $s > 1$, si

$$km\lambda L\lambda \geqq 1; \tag{12}$$

supposant cette condition remplie, d_{α_1} est l'un des nombres G_0, G_1; ce sera G_0 si

$$k_1 + km < k_1 - 1 + km\lambda,$$
$$km(\lambda - 1) > 1:$$

cette condition et, *a fortiori*, la condition (12) seront remplies si

$$m > \frac{1}{\lambda - 1}. \tag{13}$$

Admettant que (13) ait lieu; dans le deuxième membre de (3), le premier terme est divisible par λ^{k_1+km} et non par $\lambda^{k_1+km+\frac{1}{p}}$ qui divise chacun des autres termes; donc $c^n - a^n - b^n = \lambda^{k_1+km}\delta$, où δ est un entier algébrique non divisible par $\lambda^{\frac{1}{p}}$. Il en résulte [n° III, note (1), 3°], par la considération de δ^p, que $k_1 + km$ est un entier, c'est-à-dire $k = k'p$, où k' est entier; la plus haute puissance de λ qui divise a est $\lambda^{k'p}$.

Un raisonnement identique s'applique à chacun des diviseurs premiers de p qui divisent a ou b, et même, avec quelques changements de signes, à ceux qui divisent c d'après (4), pourvu que chacun de ces diviseurs satisfasse à (13). Donc :

Théorème II. — *L'équation (5) du théorème I peut se mettre*

sous la forme

$$a_2'^m a_1'^n + b_2'^m b_1'^n = c_2'^m c_1'^n, \tag{14}$$

où a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2' *sont premiers entre eux deux à deux, et* a_2', b_2', c_2' *n'ont d'autres facteurs premiers* λ *que ceux de* p *qui satisfont à*

$$m \leqq \frac{1}{\lambda - 1}. \tag{15}$$

En particulier :

Corollaire. — *Si,* μ *étant le plus petit facteur premier de* p, *on a*

$$m > \frac{1}{\mu - 1}, \tag{16}$$

l'équation (1) *équivaut à une équation de la forme* (1 *bis*).

Ce résultat comprend un de ceux annoncés au n° I.

VI. Nous pouvons encore établir le résultat suivant :

Théorème III. — *Si, dans l'équation* (5) *du théorème I, un des nombres ordinaires* a_2, b_2, c_2 *est une puissance* $p^{\text{ième}}$ *exacte d'un nombre ordinaire, cette équation équivaut encore à une équation de la forme* (1 *bis*). *Il en est ainsi en particulier quand* p *n'a pas plus de deux facteurs premiers distincts.*

De même, (14) *équivaut à* (1 *bis*) *si* a_2', b_2' *ou* c_2' *est une puissance* $p^{\text{ième}}$ *exacte.*

En effet, soient, par exemple,

$$b_2 = \beta^p, \qquad a_2 = \alpha^{\varpi_1 \theta_1}, \qquad c_2 = \gamma^{\varpi_2 \theta_2}, \qquad p = \varpi_1 p_1 = \varpi_2 p_2,$$

où α, γ ne sont puissances d'aucun autre nombre, où θ_1 est premier à p_1, θ_2 à p_2, tandis que ϖ_1 et ϖ_2 divisent p; soit, par exemple $p_2 \leqq p_1$. On a

$$x = a_2^m = \alpha^{\varpi_1 \theta_1 m}, \qquad z = c_2^m = \gamma^{\varpi_2 \theta_2 m},$$

$$x^{p_1} = \alpha^{\theta_1 n}, \qquad z^{p_2} = \gamma^{\theta_2 n}, \qquad [a_1^n x + (b_1 \beta)^n]^{p_2} = c_1^{p_2 n} \gamma^{\theta_2 n}. \tag{17}$$

d'après (5).

Si $p_1 = 1$, on a $p_2 = 1$, a_2, b_2, c_2 sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$ exactes et (5) peut se mettre sous la forme (1 *bis*). D'autre part on ne peut avoir $p_1 > 1$, sans quoi, $\theta_1 n$ étant premier à p_1 et $p_2 \leq p_1$, la première équation (17) ne serait pourtant pas irréductible, contrairement à ce qu'on sait [1], à cause de la dernière équation (17).

On peut raisonner de même, soit quand $p_1 = p_2$, soit quand c'est a_2 ou c_2, et non b_2, qui est une puissance $p^{\text{ième}}$ exacte.

L'extension à (14) est évidente. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Quand p a au moins trois facteurs premiers distincts, soient μ_1, μ_2, μ_3 avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, les trois plus petits. Si l'on a*

$$m > \frac{1}{\mu_3 - 1},$$

l'équation (1) *et l'équation* (5) *équivalent encore à une équation de la forme* (1 *bis*).

En effet, dans ce cas, l'inégalité (15) ne peut avoir lieu que si λ est égal à μ_1 ou à μ_2. Dans l'équation (14), a'_2, b'_2, c'_2, premiers entre eux deux à deux, ne peuvent avoir d'autres facteurs premiers que μ_1 et μ_2, c'est-à-dire que l'un d'eux se réduit à l'unité; le théorème III ci-dessus s'applique.

VII. Tous les raisonnements, calculs et résultats précédents s'étendent à l'équation indéterminée

$$a^{m_1} + b^{m_2} = c^{m_3}, \tag{18}$$

où a, b, c sont des entiers ordinaires $\neq 0$ et premiers entre eux deux à deux [2], et où

$$m_1 = \frac{N_1}{P_1} = \frac{n_1}{p}, \qquad m_2 = \frac{N_2}{P_2} = \frac{n_2}{p}, \qquad m_3 = \frac{N_3}{P_3} = \frac{n_3}{p},$$

---

[1] Th. Vahlen, *Acta mathematica*, t. XIX.

[2] On pourrait chercher à supprimer cette dernière restriction en essayant de ramener, comme au n° II, le cas où a, b, c sont des entiers quelconques au cas où a, b, c sont premiers entre eux deux à deux; mais des difficultés spéciales apparaissent. Toutefois on les surmonte assez facilement quand on suppose que deux des quantités n_1, n_2, n_3 sont égales entre elles et multiples de la troisième.

$\frac{N_i}{P_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ étant une fraction irréductible et p le plus petit commun multiple de P_1, P_2, P_3. On opérera presque mot pour mot de la même manière.

Le théorème que l'on peut espérer établir, c'est que l'équation (18) équivaut à l'équation

$$a_1^{N_1} + b_1^{N_2} = c_1^{N_3} \tag{18 bis}$$

en entiers a_1, b_1, $c_1 \neq 0$.

L'équation (5) est remplacée par

$$a_2^{m_1} a_1^{N_1} + b_2^{m_2} b_1^{N_2} = c_2^{m_3} c_1^{N_3}, \tag{19}$$

où a_1, b_1, c_1 sont des entiers premiers deux à deux et à p, tandis que les entiers a_2, b_2, c_2, aussi premiers deux à deux, n'ont d'autres diviseurs premiers que ceux de p.

Dans le cas où p est quelconque, l'équation (14) du théorème II devient

$$a_2'^{m_1} a_1'^{N_1} + b_2'^{m_2} b_1'^{N_2} = c_2'^{m_3} c_1'^{N_3},$$

où a_1', b_1', c_1', a_2', b_2', c_2' sont premiers entre eux deux à deux, et a_2', b_2', c_2' n'ont d'autres facteurs premiers que ceux λ de p satisfaisant respectivement à

$$m_i \leqq \frac{1}{\lambda - 1} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Si l'un des entiers a_2', b_2', c_2' est une puissance P_1, P_2 ou $P_3^{\text{ième}}$ exacte respectivement, par exemple si p n'a pas plus de deux facteurs premiers différents, on voit, en raisonnant comme au théorème III [1], que (18) équivaut à (18 *bis*). Cette même équivalence a lieu quand une des inégalités (20) est impossible, car alors un des nombres a_2', b_2', c_2' est égal à 1; il en est ainsi quand une des quantités m_i est plus grande que $\frac{1}{\mu - 1}$, μ étant le plus petit diviseur premier de p, ou quand les m_i sont toutes plus

---

[1] Si $b_2 = \beta^{P_2}$, on pose

$$a_2 = \alpha^{\varpi_1 \theta_1}, \qquad c_2 = \gamma^{\varpi_3 \theta_3}, \qquad P_1 = \varpi_1 p_1, \qquad P_3 = \varpi_3 p_3,$$

où θ_1 est premier à p_1, θ_3 à p_3.

grandes que $\frac{1}{p_3 - 1}$, d'après la définition de p_3 (n° VI, Corollaire).

VIII. L'équation (1), où m est négatif, équivaut à une équation de même forme où m est positif.

Soit, en effet, l'équation

$$(21) \quad \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} = \frac{1}{c^m} \qquad \text{ou} \qquad b^m c^m + c^m a^m = a^m b^m \qquad (m > 0);$$

c divise ab [n° III, note (1), 1°], et si $ab = Cc$,

$$a^m + b^m = C^m.$$

Soit d le plus grand commun diviseur de a et b, $a = \alpha d$, $b = \beta d$, où α, β sont premiers entre eux; d divise C, et $C = \gamma d$,

$$(22) \qquad \alpha^m + \beta^m = \gamma^m;$$

α, β, étant premiers entre eux, le sont aussi chacun à γ, car un diviseur commun à α et γ, par exemple, diviserait β (n° II). L'équation (22) est de la forme (1). On a

$$ab = \alpha\beta d^2 = Cc = \gamma dc, \qquad \alpha\beta d = \gamma c,$$

et γ divise d.

Inversement, soit α, β, γ une solution de (22) en entiers $\neq 0$ et d un multiple quelconque de γ; posons $\alpha\beta d = \gamma c$; on a

$$(\gamma dc)^m = (\alpha dc)^m + (\beta dc)^m;$$

soient

$$a = \alpha d, \qquad b = \beta d, \qquad \gamma dc = \alpha\beta d^2 = ab,$$
$$(ab)^m = (ac)^m + (bc)^m,$$

et l'on obtient une solution de (21). Les équations (21) et (22) sont entièrement équivalentes; cette conclusion ne suppose pas $p > 1$.

SUR LA TRANSFORMATION DE LIE

(Étude géométrique);

Par M. Maurice Fouché.

1. *Introduction.* — Dans un excellent Ouvrage sur *Les premiers principes de la Géométrie moderne*, Duporcq a donné de la transformation de Lie qui, à chaque droite de l'espace fait correspondre une sphère, une interprétation géométrique à laquelle j'étais arrivé de mon côté, et qui, à cause de sa simplicité, a dû se présenter à l'esprit de plusieurs géomètres. Cependant, il ne semble pas que le texte de Duporcq soit suffisamment explicite au point de vue de la rigueur des raisonnements. L'auteur a bien indiqué que la transformation de Lie consiste à faire correspondre à chaque point de l'espace une droite isotrope et qu'elle doit être possible parce que les points de l'espace d'une part, et le complexe des droites isotropes d'autre part, constituent deux ensembles dont les éléments dépendent d'un même nombre de paramètres. Ensuite, à l'aide de considérations fort simples relatives à des rapports anharmoniques, il explique que si l'on fait correspondre arbitrairement cinq points de l'espace à cinq droites isotropes on en déduira, par des constructions faciles, la droite isotrope qu'il faut faire correspondre à un point donné de l'espace. Mais Duporcq ne discute pas les cas d'indétermination que présente sa construction. Je ne prétends pas faire ici la critique complète de cette théorie un peu sommaire; mais il est des remarques qu'il me semble utile de signaler.

D'abord les droites isotropes, au sens précis du mot, ne forment pas véritablement un complexe. Le complexe est celui des droites qui rencontrent le cercle de l'infini : il comprend, outre les droites isotropes proprement dites, toutes les droites du plan de l'infini, chacune de celles-ci étant considérée comme double puisqu'elle rencontre le cercle de l'infini en deux points. Or, dans la transformation de Lie, ces droites de l'infini ne correspondent pas à des points distincts de l'espace. La vérité est qu'il y a une droite que j'appellerai *droite singulière*, à chaque point de laquelle on peut

faire correspondre non une droite de l'infini, mais *un point du cercle de l'infini*. Avec les formules habituelles, la droite singulière est la droite de l'infini de l'un des plans de coordonnées; mais il est bien évident que si l'on combine la transformation classique avec une transformation homographique, on pourra donner à la droite singulière une position quelconque.

D'autre part, Duporcq fait état de la proposition fort simple d'après laquelle il existe une droite isotrope et une seule qui en rencontre trois autres. Or cette proposition tombe en défaut si les trois droites isotropes données passent par un même point du cercle de l'infini.

L'omission de la discussion des cas d'exception empêche évidemment de mettre en lumière le caractère homographique de la transformation. Le caractère dualistique n'en est pas non plus nettement indiqué. On n'a pas expliqué qu'à chaque plan de l'espace correspond aussi une droite isotrope, sauf, bien entendu, aux plans qui passent par la droite singulière.

Enfin Duporcq signale aussi l'importante propriété de la transformation de Lie qui, aux lignes asymptotiques d'une surface, fait correspondre les lignes de courbure d'une autre surface; mais il n'en donne pas de démonstration géométrique.

Il m'a semblé qu'il pouvait être utile de combler ces lacunes, et c'est pourquoi j'ai cherché à reprendre d'une manière plus attentive l'étude géométrique de cette importante transformation.

2. *Remarques sur les transformations homographiques.* — Bien que la transformation homographique soit très connue, je ferai cependant, à son sujet, quelques remarques qui seront utiles pour la suite de ce travail.

Une transformation homographique ponctuelle est une transformation *algébrique biunivoque* entre *tous les points de l'espace*, sans aucune exception, y compris les points imaginaires et les points à l'infini. Un plan (P) et une droite donnés (D) se transforment ainsi en une surface (P′) et une ligne (D′) qui ont un point commun et un seul, lequel correspond au point d'intersection de (P) et de (D); cela exige que (P′) soit un plan et (D′) une droite. Il en résulte qu'une droite se transforme en une droite et qu'une surface de $n^{\text{ième}}$ ordre se transforme en une

surface de $n^{\text{ième}}$ ordre puisque chacune des deux surfaces doit couper une droite quelconque en n points.

Une transformation homographique dualistique fait correspondre d'une manière biunivoque un point à un plan et inversement, et cela sans aucune exception.

L'importance de la discussion des cas d'exception est capitale, car, sans cet examen, on se ferait de singulières illusions. Par exemple l'inversion établit bien une correspondance biunivoque entre les points de l'espace, sauf en ce qui concerne les points de l'infini et le pôle d'inversion. Aussi l'inversion n'est-elle pas homographique.

Le même exemple nous montre qu'il ne serait pas correct de dire qu'une transformation biunivoque entre deux ensembles dont les éléments dépendent d'un même nombre de paramètres est homographique, car l'inversion établit une telle correspondance entre les points de deux espaces superposés si l'on y supprime le pôle et les points de l'infini. Il semble alors qu'on doive réserver le nom d'*homographiques* aux transformations définies comme il suit : pour qu'on puisse établir une transformation homographique entre deux ensembles, il faut que ces deux ensembles aient la même *structure*, c'est-à-dire qu'ils puissent être représentés par un même système de coordonnées, de telle sorte que chaque élément de l'un ou l'autre ensemble corresponde d'une manière biunivoque à un système de valeurs de ces coordonnées. Il convient aussi, en général, d'exclure les valeurs infinies des coordonnées, soit que les systèmes de valeurs, dont une au moins est infinie, ne correspondent à aucun élément de l'ensemble, soit qu'on emploie des coordonnées homogènes, ce qui est préférable. Les éléments qui se correspondent sont alors ceux qui sont représentés par les mêmes valeurs des coordonnées. C'est ainsi qu'on peut établir une correspondance homographique entre les points de deux courbes unicursales distinctes ou confondues : le système de coordonnées est alors composé de deux coordonnées homogènes. On le peut aussi entre les points de deux quadriques : les coordonnées sont au nombre de quatre réparties en deux groupes homogènes. On le peut aussi entre les points d'une courbe unicursale et les génératrices d'un même système d'une quadrique. Par exemple,

l'inversion qui n'est pas homographique établit cependant une correspondance homographique entre les points de deux sphères; mais il est impossible d'établir une pareille correspondance entre les points d'un plan et ceux d'une sphère.

3. *L'homographie ponctuelle.* — La manière la plus rapide d'établir rigoureusement et sans calcul la possibilité et les propriétés de l'homographie ponctuelle me paraît résulter de l'emploi simultané des rapports anharmoniques et des coordonnées homogènes.

Considérons dans l'espace quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 formant les sommets d'un *tétraèdre* dit *de référence*, et un point P dit *point directeur* qui n'est situé dans aucune des faces de ce tétraèdre. Par chaque arête du tétraèdre de référence faisons passer quatre plans dont deux sont des faces du tétraèdre, dont le troisième passe par le point directeur P et le quatrième par un point quelconque M de l'espace. Ces quatre plans ont un rapport anharmonique que je désignerai par $(A_1 A_2 . A_3 A_4 PM)$ s'ils passent par l'arête $A_1 A_2$.

A chaque point M de l'espace correspondent ainsi six rapports anharmoniques dépendant chacun d'une des arêtes du tétraèdre de référence. Or, si l'on considère les intersections de la droite PM avec les faces du tétraèdre, on démontrera sans peine que les trois rapports anharmoniques qui dépendent de trois arêtes concourantes sont les quotients deux à deux des trois autres, à condition bien entendu qu'on prenne les éléments dans un ordre convenable. Par exemple :

$$(A_1 A_2 . A_3 A_4 MP) = (A_2 A_3 . A_1 A_4 MP) : (A_2 A_4 . A_1 A_3 MP).$$

Si alors on désigne par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ les trois rapports anharmoniques qui dépendent des côtés de l'un des triangles, $A_2 A_3 A_4$ par exemple, les trois autres rapports anharmoniques seront respectivement égaux à $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$, et x, y, z, t constituent un système ds quatre coordonnées homogènes telles qu'à tout point M de l'espace correspond un système de valeurs et un seul. Inversement, la connaissance des valeurs des quatre coordonnées donne les valeurs des six

rapports anharmoniques. L'une au moins des quatre coordonnées n'est pas nulle : supposons que ce soit t : les trois premiers rapports $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ définissent trois plans passant respectivement par les côtés du triangle $A_2A_3A_4$ et se coupant en un seul point qui sera le point M; les trois autres rapports anharmoniques seront $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$ et $\frac{x}{z}$. Si t est nulle, ces trois plans se confondent sur le plan $A_1A_2A_3$; mais alors on prendra les rapports qui correspondent à une autre face du tétraèdre de référence. De toute manière on trouve un point M et un seul. Il est aisé de vérifier que tous les points d'un des plans du tétraèdre de référence ont une coordonnée nulle, que tous les points d'une des arêtes ont deux coordonnées nulles, et enfin que chacun des quatre sommets de ce tétraèdre a trois coordonnées nulles. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de l'espace et les systèmes de valeurs des quatre coordonnées, et cela sans aucune exception.

Il suffit alors de changer le tétraèdre de référence et le point directeur, et de faire correspondre les points qui ont les mêmes coordonnées dans les deux systèmes.

Ainsi se trouve établie rigoureusement la proposition fondamentale qu'une transformation homographique ponctuelle est complètement définie quand on se donne cinq couples de points homologues pourvu que dans chacun des systèmes, quatre de ces points ne soient pas dans un même plan.

4. *Le complexe mixte.* — J'arrive maintenant à la transformation de Lie : mais, au lieu du cercle de l'infini, je considère une conique (F) dite *fondamentale*. Dans le complexe des droites qui rencontrent cette conique, je supprime les droites situées dans le plan de cette conique et j'introduis les points mêmes de cette conique. J'obtiens ainsi le *complexe mixte*. Je vais montrer que, malgré son caractère hétérogène, cet ensemble de droites et de points, auxquels je donnerai le nom commun d'*éléments*, possède la même structure que l'ensemble des points de l'espace et jouit d'un certain nombre de propriétés identiques à celles des points et des plans, de telle sorte qu'on pourra faire correspondre

homographiquement ces éléments soit aux points, soit aux plans de l'espace.

J'appellerai *piste* une suite d'éléments définis comme il suit : Une piste peut se composer d'une suite de droites du complexe, et alors elle sera formée des génératrices de même système d'une quadrique, ce qu'on appelle une *semi-quadrique*. Elle peut aussi se composer des droites passant par un même point de la conique fondamentale et situées dans un même plan, ce qui constitue un faisceau. Seulement, dans ce faisceau, il y a une droite faisant partie du plan de la conique (F). Cette droite devra être remplacée par son second point d'intersection avec la conique. Enfin la piste peut se composer des points de la conique (F). Dans tous les cas, *le rapport anharmonique de quatre éléments d'une piste est bien déterminé.*

5. *Les pistes conjuguées.* — Je dis d'abord que deux éléments quelconques définissent une piste et une seule dont ils font partie et en même temps une piste *conjuguée* formée, dans le cas général, des droites du complexe qui rencontrent ces deux-là *autre part que sur la conique fondamentale.*

Si les deux éléments donnés sont deux droites rencontrant la conique (F) en deux points différents et ne se rencontrant pas elles-mêmes, elles déterminent avec la conique (F) une quadrique. Les deux pistes conjuguées sont formées des génératrices de cette quadrique de l'un ou l'autre système. On voit aussi que les seules droites du complexe mixte qui rencontrent les deux droites données autre part que sur la conique (F) sont les génératrices de cette quadrique n'appartenant pas au même système qu'elles, parce que, par chaque point de la conique (F) autre que les pieds de ces droites sur cette conique, on ne peut faire passer qu'une seule droite les rencontrant toutes deux. Il convient aussi de remarquer que si A est le pied sur la conique (F) d'une des deux droites données, la génératrice de la piste conjuguée passant par A est située dans le plan tangent en A à la quadrique, de sorte que le plan des deux droites est tangent à la conique (F).

Si les deux droites se rencontrent en un point S non situé sur (F), la quadrique se réduit au cône de sommet S et les deux pistes conjuguées sont confondues.

Si les deux droites partent d'un même point A de la conique (F), leur plan coupe cette conique en un second point A′, et les seules droites du complexe mixte qui les rencontrent sont celles qui passent par A′ dans ce plan-là. La quadrique se décompose donc en deux plans dont l'un est celui des deux droites et l'autre le plan de la conique (F). Alors la première piste sera constituée par le faisceau des droites issues de A dans le plan des deux droites données, et la piste conjuguée sera formée du faisceau du sommet A′ dans le même plan. Il reste entendu qu'il faudra remplacer la droite AA′ du premier faisceau par le point A′ et la droite A′A du second par le point A.

Si le plan des deux droites est tangent à la conique (F), le point A′ coïncide avec le point A et les deux pistes coïncident.

Si les deux éléments sont une droite coupant la conique (F) en A et un autre point A′ de cette conique, les deux pistes seront formées des faisceaux de sommet A et A′ dans le plan défini par la droite donnée et le point A′. Elles coïncident si le point A′ coïncide avec A. Bien entendu, dans ce cas, il faudra remplacer la tangente en A à la conique (F) par son point de contact.

Si, enfin, les deux éléments donnés sont deux points de la conique (F), il faut concevoir que la quadrique se réduit au plan de (F) considéré comme plan double, et les deux pistes se composent l'une et l'autre des points de la conique (F).

On remarquera que, dans tous les cas, deux éléments du complexe mixte définissent une quadrique et une seule, laquelle peut se réduire à deux plans ou à un plan double. Deux pistes conjuguées sont toujours situées sur une même quadrique.

Il résulte évidemment de ce qui précède que deux pistes distinctes n'ont jamais plus d'un élément commun. En général, elles n'en ont aucun.

6. *Analogie avec le plan et la droite.* — L'existence des pistes conjuguées fait prévoir le caractère dualistique du complexe mixte. Nous supposerons que chaque élément de l'ensemble soit pour ainsi dire dédoublé, c'est-à-dire qu'il se compose de deux éléments superposés que nous appellerons *élément-point* et *élément-plan*. Je dirai de plus que deux éléments de classes différentes conviennent l'un à l'autre s'ils font partie de deux

pistes conjuguées. Ce seront, suivant les cas, deux droites ayant un point commun en dehors de la conique fondamentale, et pouvant d'ailleurs coïncider, ou bien deux droites coupant la conique fondamentale au même point et dont le plan est tangent à cette conique, ou bien une droite et son pied sur la conique fondamentale, ou enfin deux points de cette conique pouvant d'ailleurs coïncider.

On verra facilement, en reprenant la discussion précédente, que si un élément convient à deux éléments donnés, il est situé sur la conique définie par ces deux éléments, et que, par conséquent :

Si un élément convient à deux autres, il fait partie de la piste conjuguée de celle qui contient ces deux-là.

On voit ainsi que deux éléments qui conviennent l'un à l'autre sont l'analogue d'un plan et d'un point situés dans ce plan et qu'une piste est l'analogue d'une droite. Deux pistes conjuguées sont l'analogue d'une même droite considérée pour l'une comme formée de la suite de ses points, et pour l'autre de la suite des plans qui la continuent.

7. *Théorème des trois éléments.* — Les propositions qu'on vient de démontrer sont donc les analogues des suivantes, corrélatives deux à deux :

Par deux points on peut toujours faire passer une droite et une seule. Deux plans se coupent suivant une droite par laquelle passent une infinité d'autres plans. Si un plan passe par deux points, il passe par la droite qui joint ces points, ce qui revient à dire que si une droite a deux points dans un plan, elle y est située tout entière. Si un point fait partie de deux plans, il fait partie de leurs droites d'intersection, ce qui est évident.

Une proposition capitale est que trois points non en ligne droite définissent un plan qui les contient, et que trois plans qui ne passent pas par la même droite ont un point commun et un seul. L'analogue sera la suivante :

Trois éléments de la même classe ne faisant pas partie d'une

même piste déterminent toujours un élément de l'autre classe qui leur convient à tous trois, et un seul.

Pour le démontrer, remarquons que parmi les trois éléments donnés il y a au moins une droite (D) puisque trois points de la conique fondamentale font partie de la même piste. Les deux autres éléments déterminent une piste (P) et une piste conjuguée (P′). Il suffit donc de faire voir qu'il existe un élément et un seul de cette piste (P′) convenant à la droite (D). Si (P′) est une semi-quadrique, la droite (D) la coupe en deux points dont l'un A est sur la conique (F). La génératrice (G) de (P′) qui passe par le second point d'intersection B est la droite cherchée.

Il n'y a pas d'exception si le point B se confond avec le point A parce qu'alors les deux droites (D) et (G) sont dans un même plan tangent à la semi-quadrique (P′) et par suite à la conique fondamentale.

Si la piste (P′) est un faisceau de droites, le plan de ce faisceau est coupé par la droite (D) en un point B et l'élément cherché est la droite du faisceau passant par B. Il peut se faire que la droite (D) passe par le sommet A du faisceau, lequel est situé sur la conique fondamentale. Alors l'élément cherché est le point A lui-même.

Si enfin la piste (P′) se compose des points de la conique (F), l'élément cherché est le pied de la droite (D) sur cette conique.

Des cas particuliers remarquables sont ceux où les trois éléments sont trois droites passant par un même point A de la conique (F), ou un point A de la conique (F) et deux droites passant par ce point, ou enfin une droite passant par A et deux points de (F). L'élément cherché est alors le point A.

Le raisonnement précédent montre aussi qu'il existe un élément et un seul faisant partie d'une piste donnée et convenant à un autre élément donné ne faisant pas partie de la piste conjuguée. C'est l'analogue de ce qu'une droite et un plan qui ne la contient pas ont un point commun et un seul, ou que, une droite et un point extérieur déterminent un plan et un seul. Seulement on n'a traité que le cas où l'élément donné est une droite. Pour combler cette lacune, prenons deux éléments α et β de la piste (P′); avec l'élément donné, cela en fera trois auxquels conviendra un élément (E) et un seul. Mais on a vu au numéro précédent que tout élément

qui convient à deux éléments de la piste (P′) fait partie de la piste conjuguée (P). L'élément (E) est donc l'élément cherché, et ce sera le seul parce que tout élément de (P) doit convenir à α et à β.

Cette proposition peut encore s'énoncer : *Dans l'ensemble des éléments qui conviennent à un élément de l'autre classe, il y en a un et un seul faisant partie d'une piste de la première classe, pourvu que cette piste ne fasse pas partie de l'ensemble considéré.*

Dans l'espace, si deux droites ont un point commun, elles sont dans un même plan, et réciproquement. La traduction sera :

Si deux pistes composées d'éléments de la même classe ont un élément commun, il existe un élément de l'autre classe et un seul qui convient à tous les éléments de ces deux pistes, ou, ce qui revient au même :

Si deux pistes ont un élément commun, les pistes conjuguées ont aussi un élément commun.

Il suffit de considérer l'élément commun aux deux pistes et deux autres pris sur chacune d'elles. A ces trois éléments en convient un de l'autre classe et un seul, et celui-là fait partie des deux pistes conjuguées des pistes données puisqu'il convient à des éléments de chacune d'elles.

8. *Propriétés projectives.* — Toutes les pistes qui ont un élément commun et dont tous les éléments conviennent à un même élément de l'autre classe définissent avec leurs conjuguées une suite de quadriques passant par (F) et admettant, dans le cas général, deux génératrices de systèmes différents et formant par suite un faisceau. Donc le rapport anharmonique de quatre d'entre elles est complètement défini ; il importe peu qu'une de ces quadriques se réduise à deux plans ou au plan double de la conique (F).

Si les deux éléments communs sont deux droites confondues, le faisceau sera celui des cônes ayant pour base la conique (F) et la droite donnée pour génératrice commune.

Si l'un des éléments communs est une droite et l'élément commun de l'autre classe un point A de la conique fondamentale, le point A est le pied de la droite sur la conique (F) et le faisceau de quadriques se réduit au faisceau des plans passant par la droite.

Si les deux éléments communs sont deux points de la conique fondamentale, on aura encore un faisceau de plans passant par la droite des deux points, laquelle sera tangente à la conique (F) si les deux points coïncident. Dans tous les cas le rapport anharmonique de quatre de ces plans est bien déterminé.

Nous aurons ainsi deux espèces de rapports anharmoniques : celui de quatre éléments d'une même piste qui est l'analogue de celui de quatre points en ligne droite ou de quatre plans passant par une même droite, et celui de quatre pistes ayant un élément commun qui est l'analogue de celui de quatre droites passant dans le même plan par un même point.

Les propriétés projectives des points, droites et plans dépendent toutes de ce que le rapport anharmonique de quatre droites ou de quatre plans d'un même faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre points où une droite quelconque coupe ces quatre droites ou ces quatre plans, et cette égalité résulte de ce qu'il y a correspondance homographique entre les droites ou les plans du faisceau d'une part, et les points correspondants de la transversale d'autre part, c'est-à-dire du fait que deux droites dans le plan, une droite et un plan dans l'espace ont un point commun et un seul. Puisque nous avons trouvé dans le complexe mixte les propriétés équivalentes à celles-là, les propriétés projectives des droites, plans ou points s'appliqueront sans changement aux éléments et aux pistes de ce complexe mixte, et l'on pourra par le procédé indiqué au n° 3 constituer un système de quatre coordonnées homogènes représentant les éléments d'une manière biunivoque.

On se donnera par exemple cinq éléments-points choisis de manière qu'aucun élément-plan ne convienne à quatre d'entre eux, A, B, C, D, P. Si M est un élément-point quelconque, considérons les quatre éléments-plans définis respectivement par ABC, ABD, ABP, ABM. Ils font partie de la piste conjuguée de celle qui contient A et B. Ils admettent donc un rapport anharmonique (AB.CDMP). On obtient six de ces rapports anharmoniques en faisant toutes les combinaisons deux à deux des quatre éléments A, B, C, D. Par la considération de la piste définie par M et P, on verra, comme on l'a indiqué au n° 3, que trois de ces rapports sont les quotients de deux des trois autres, ce qui permettra de les représenter tous les six par les quotients de deux des quatre coor-

données homogènes. Enfin on démontrera comme au n° 3 qu'à tout système de valeurs de ces quatre coordonnées correspond un élément-point et un seul qui sera défini par trois éléments-plans définis à leur tour par trois des six rapports anharmoniques que l'on pourra toujours choisir de manière que les trois éléments-plans ne coïncident pas, ainsi que cela a été expliqué au n° 3.

9. *La transformation.* — La correspondance entre les points de l'espace et les éléments du complexe mixte sera complètement définie par l'égalité des valeurs des coordonnées, si, à cinq points de l'espace parmi lesquels il n'y en a pas quatre dans un même plan, on fait correspondre cinq éléments parmi lesquels quatre ne conviennent pas à un même élément de l'autre classe. Cette correspondance est biunivoque et peut être dite *homographique*.

Considérons maintenant l'ensemble des éléments-points qui conviennent à un même élément-plan, et une piste d'éléments-points ne faisant pas partie de cet ensemble. Nous savons (n° 7) qu'il existe un élément-point et un seul commun à cette piste et à cet ensemble. Or, à l'ensemble considéré correspond une certaine surface et à la piste une certaine ligne, lesquelles ont par conséquent un point commun et un seul. Cette surface est donc un plan et cette ligne une droite. Inversement, à une droite (D) on fera correspondre la piste définie par les éléments-points qui correspondent à deux points de la droite (D), et à un plan (P) l'ensemble des éléments-points qui conviennent à l'élément-plan E convenant aux trois éléments-points qui correspondent à trois points du plan (P). Il est évident qu'à cet ensemble et à cette piste correspondent une droite et un plan qui ne peuvent être que la droite (D) et le plan (P). On peut encore dire que le plan (P) correspond à l'élément-plan E et réciproquement. Les propriétés principales de la transformation peuvent alors s'énoncer ainsi :

1° *A chaque point de l'espace correspond un élément du complexe mixte et un seul, et réciproquement.*

2° *A tout plan de l'espace correspond un élément du complexe mixte et un seul, et réciproquement.*

3° *A un plan et à un point de ce plan correspondent des éléments qui conviennent l'un à l'autre, et réciproquement.*

4° *A tous les points d'une droite correspondent les éléments d'une piste, et à tous les plans passant par cette droite, les éléments de la piste conjuguée,* ou encore : *A toute droite de l'espace correspond une des quadriques de l'ensemble*, cette quadrique pouvant d'ailleurs se réduire à deux plans distraits et confondus.

5° *Si deux droites ont un point commun, les quadriques qui leur correspondent ont deux génératrices communes de systèmes différents et sont par conséquent tangentes, et réciproquement.*

Si maintenant nous supposons que la conique fondamentale soit le cercle de l'infini, les droites du complexe mixte seront des droites isotropes, les quadriques de l'ensemble seront des sphères et nous retomberons sur la transformation de Lie qui fait correspondre à toute droite une sphère, et à deux droites situées dans un même plan, deux sphères tangentes.

En ce qui concerne la transformation inverse, il faut bien remarquer que, si à chaque élément du complexe mixte ne correspond qu'un seul point ou un seul plan, à chaque quadrique de l'ensemble correspondent au contraire *deux* droites suivant que l'on considère comme formés d'éléments-points l'un ou l'autre des deux systèmes de génératrices qu'elle contient. Ces deux droites se confondent si la quadrique est un cône ou bien si elle se réduit à deux plans dont l'un est tangent à la conique fondamentale. A la conique fondamentale, c'est-à-dire à la quadrique réduite au plan de cette conique considéré comme plan double, correspond la *droite singulière*, qui contient tous les points correspondant aux divers points de la conique fondamentale et par laquelle passent tous les plans qui correspondent aux mêmes points.

10. *Le complexe linéaire.* — A chaque point A de l'espace correspond un élément-point E du complexe mixte qui peut être aussi considéré comme un élément-plan et auquel correspond un plan (P) de l'espace, mais deux éléments de classe différente qui coïncident conviennent l'un à l'autre. Donc le plan (P) contient le point A. Il en résulte que la transformation qui nous occupe établit aussi entre les éléments de l'espace une correspondance

dualistique par laquelle à chaque point de l'espace on fait correspondre un plan passant par ce point et inversement. Cette correspondance définit un *complexe linéaire*.

Soient maintenant deux pistes conjuguées (P) et (P′) appartenant par conséquent à une même quadrique. Nous savons qu'il leur correspond deux droites suivant que c'est (P) ou (P′) qui est considérée comme formée d'éléments-points.

A un point de la première droite correspond un élément de la piste-point (P) auquel correspond à son tour un plan si (P) est considérée comme une piste-plan. Mais alors ce plan contient tous les points qui correspondent aux divers éléments de la piste-point conjuguée (P′) puisque l'élément E convient à tous ceux de la piste (P′). C'est dire que la transformation dualistique fait correspondre à chaque point de la première droite un plan qui passe par la seconde. Donc : *les deux droites qui correspondent à une même quadrique sont conjuguées par rapport au complexe linéaire.*

Les droites du complexe linéaire sont celles qui se correspondent à elles-mêmes dans la transformation dualistique. Donc, dans notre transformation elles correspondent à des cônes parmi lesquels il faut comprendre les plans tangents à la conique fondamentale et cette conique elle-même. La droite singulière fait partie du complexe linéaire.

Tous les éléments d'une piste composée d'un faisceau de droites conviennent, comme on l'a vu, au sommet du faisceau, lequel est situé sur la conique fondamentale (n° 5). Donc les points qui leur correspondent sont dans le plan qui correspond à ce sommet, lequel passe par la droite singulière. Donc : les droites qui correspondent à des quadriques dégénérées sont celles qui rencontrent la droite singulière.

11. *La transformation est de contact.* — Un point M et un plan (P) qui le contient se transforment en deux éléments qui conviennent l'un à l'autre. Je ne parlerai que du cas général où ces deux éléments sont deux droites qui se coupent en un point M′ non situé sur la conique fondamentale. A l'élément de contact M (P) on peut donc faire correspondre le point M′ et le plan (P′) des deux droites M′A et M′B. Si le point M décrit une surface (S) et

si (P) est le plan tangent à cette surface, le point M′ décrira une autre surface (S′). Je vais démontrer que le plan (P′) est tangent en M′ à la surface (S′).

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires.

Si un point (M) décrit une ligne (L), la droite du complexe mixte qui lui correspond décrit une surface réglée (R). Si deux lignes (L) et (L′) passent par un même point M, les deux surfaces réglées qui leur correspondent ont une génératrice commune (G) qui correspond au point (M). Supposons maintenant que les deux lignes (L) et (L′) soient tangentes en M, et considérons sur ces deux lignes deux points N et N′ infiniment voisins de M que l'on fait correspondre l'un à l'autre en exprimant leurs coordonnées en fonction d'un paramètre α. Les coordonnées de même nom de ces deux points ne différeront que d'un infiniment petit du second ordre par rapport à α. Mais ces mêmes coordonnées servent aussi à définir sur le complexe mixte les droites (H) et (H′) qui correspondent respectivement aux deux points N et N′. Si l'on coupe tout le système par un plan quelconque rencontrant (G), (H) et (H′) respectivement en D, C et C′, la distance CC′ sera du second ordre, tandis que DC et DC′ seront du premier, d'où il suit que l'angle CDC′ est infiniment petit, ce qui prouve que les deux surfaces réglées ont le même plan tangent en D. Puisque D est un point quelconque de (G) les deux surfaces réglées sont circonscrites tout le long de la génératrice (G).

La proposition corrélative que l'on peut établir soit d'une manière analogue, soit par transformation dualistique est que : si un plan se déplace à partir d'une position initiale de deux manières différentes, la droite du complexe mixte qui lui correspond décrit deux surfaces réglées ayant une génératrice commune; mais si les deux développables enveloppées par le plan mobile sont tangentes, ou, ce qui revient au même, si la caractéristique du plan mobile est la même dans les deux déplacements, les deux surfaces réglées sont circonscrites le long de la génératrice commune.

Cela posé, remarquons qu'aux deux droites qu'on peut mener par le point M dans le plan (P) correspondent deux quadriques qui doivent contenir la génératrice M′A, élément-point correspondant au point M et la génératrice M′B, élément-plan correspondant au

plan (P). Toutes ces quadriques font donc partie d'un même faisceau et ont au point M′ le même plan tangent M′AB. Si maintenant le point M se déplace sur la surface (S), il décrira une ligne tangente à l'une des droites précédentes, et la droite M′A qui lui correspond décrira une surface réglée circonscrite le long de la génératrice M′A à l'une des quadriques du faisceau, et par conséquent tangente en M′ au plan M′AB. Le point M′ se déplacera sur cette surface et sa trajectoire sera tangente au plan M′AB. Comme il en sera de même quelle que soit la trajectoire du point M′ sur la surface (S′), il faut bien que cette surface soit tangente en M′ au plan M′AB.

12. *La transformation de Lie fait correspondre aux lignes asymptotiques d'une surface les lignes de courbure d'une autre surface.* — Supposons que le point M décrive une ligne asymptotique (Z) de la surface (S). La droite correspondante décrira une surface réglée circonscrite à la quadrique (Q) correspondant à la tangente à (Z) le long de sa position initiale M′A. D'autre part, le plan (P) tangent à (S) admet pour caractéristique cette même tangente à (Z). Donc la droite qui lui correspond décrira une surface réglée circonscrite le long de M′B à cette même quadrique (Q). Cela veut dire que les positions infiniment voisines de M′A et M′B ne diffèrent que par des infiniment petits du second ordre de deux génératrices de la quadrique (Q) infiniment voisines respectivement de M′A et de M′B. Donc, on peut dire que le plan infiniment voisin de M′AB ne diffère que par des infiniment petits du second ordre d'un plan tangent à (Q) infiniment voisin de M′AB. Mais la tangente à la trajectoire d'un point et la caractéristique d'un plan mobile ne dépendent que des infiniment petits du premier ordre. Donc la tangente à la trajectoire de M′ et la caractéristique du plan M′AB sont conjuguées sur la quadrique (Q). Elles le sont évidemment aussi sur la surface (S′), lieu du point M′, par le fait seul que la transformation est de contact.

Si alors on considère la transformation de Lie, la quadrique (Q) est une sphère et les directions conjuguées sont rectangulaires, d'où il suit immédiatement que la trajectoire de M′ et la caractéristique du plan M′AB sont tangentes aux deux lignes de courbure de la surface (S′). Puisqu'il en est ainsi pour toute position de M′,

on voit que, quand le point M décrit une ligne asymptotique de la surface (S), le point M′ qui lui correspond décrit une ligne de courbure de la surface transformée (S′).

Pour être complet je rappellerai la remarque bien connue que dans la transformation inverse, à la surface (S′) correspondent deux surfaces (S) parce que chaque plan tangent à la surface (S′) détermine deux droites du complexe mixte dont chacune peut être prise pour un élément-point, l'autre étant un élément-plan. On obtient ainsi pour chaque point M′ deux éléments de contact M (P) et $M_1(P_1)$. Le plan (P_1) est l'homologue du point M dans la transformation dualistique, et le plan (P) l'homologue du point (M). Il en résulte que les deux surfaces (S) et (S_1) se correspondent point par point de manière que le plan tangent en un point de l'une passe par le point correspondant de l'autre, et inversement, de sorte que les deux plans tangents qui se correspondent passent par la droite qui joint leurs points de contact. En somme, les deux surfaces sont conjuguées par rapport au complexe linéaire, et les lignes asymptotiques de l'une sont conjuguées des lignes asymptotiques de l'autre.

SUR LES EXPRESSIONS QUI S'ÉCARTENT LE MOINS DE ZÉRO DANS UN INTERVALLE;

Par M. de la Vallée Poussin.

Considérons une suite de $n+1$ puissances $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$ dont les exposants sont des nombres positifs donnés

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$$

dont le premier peut être nul. Donnons-nous le coefficient A_k de l'une des puissances précédentes ($A_k \neq 0$). Désignons par $P(x)$ l'expression (réelle)

$$(1) \qquad P(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + a_n x^{\alpha_n},$$

contenant le terme assigné $A_k x^{\alpha_k}$, qui peut être le premier sous la condition de ne pas se réduire à une constante ($\alpha_k \neq 0$), et où les

coefficients non donnés a sont choisis de manière que P s'écarte le moins possible de zéro dans l'intervalle (0, 1). Le polynome P, qui est déterminé ainsi d'une manière univoque, est le *polynome d'approximation* de zéro relatif à la suite des exposants α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et au coefficient A_k. Le maximum L de $|P|$ est l'*écart* correspondant et cet écart est atteint $n+1$ fois avec alternance de signes dans l'intervalle (0, 1). Ces conclusions exigent une condition que nous supposerons réalisée : le terme assigné dans P ne se réduit pas à une constante; il diffère donc du premier si $\alpha_0 = 0$ (¹).

On conçoit que laissant invariable le terme $A_k x^{\alpha_k}$, on modifie les autres exposants de la suite. Alors le polynome d'approximation change et l'écart correspondant varie. Les théorèmes suivants précisent le sens de cette variation :

Théorème. — *Si l'on majore un exposant $\alpha_i > \alpha_k$, l'écart augmente* (²).

Nous désignerons par $\beta > \alpha_i$ la nouvelle valeur de α_i, par Q le nouveau polynome d'approximation, et par M l'écart correspondant. Il faut prouver que M est supérieur à L.

On sait qu'une expression à $n+1$ termes de la forme (1) admet au plus n racines positives, et que le nombre de ces racines ne peut surpasser celui des variations de signes des coefficients (³).

Considérons le polynome initial d'approximation

$$P = a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} + \ldots.$$

Il admet exactement n racines *positives* dans l'intervalle (0, 1) puisqu'il atteint l'écart L avec alternance de signes en $n+1$ points consécutifs de cet intervalle. Ses coefficients sont donc différents de zéro et de signes alternés. Si, pour fixer les idées, nous suppo-

---

(¹) *Voir* S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (Ac. des Sc. de Belgique : *Mémoires*, in-4°, 2e série, t. IV, 1912).

(²) M. Bernstein a démontré ce théorème par un raisonnement plus détourné dans le cas particulier où l'on assigne x comme premier terme de P (*Mémoire cité*, théorème 36).

(³) *Mémoire cité*, lemme 27.

sons $A_k > 0$, nous voyons que le signe du premier coefficient a_0 est celui de $(-1)^k A_k$, donc $(-1)^k$.

Considérons maintenant le nouveau polynome

$$Q = b_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + b x^{\beta} + \ldots;$$

le signe de b_0 sera le même que celui de a_0 pour la même raison.

Formons la différence ($\beta > \alpha_i$, par hypothèse)

$$P - Q = (a_0 - b_0) x^{\alpha_0} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} - b x^{\beta} + \ldots;$$

le terme en x^{α_k} en a disparu.

Je vais d'abord prouver que M est $\gtreqless$ L. A cet effet, je supposerai les écarts inégaux et j'en conclurai $M > L$.

Le polynome $P - Q$ a $n + 1$ termes comme P (un terme en x^{β} remplace celui en x^{α_k}); donc $P - Q$ a n racines positives au plus. Je dis qu'il en a n exactement. Soient, en effet, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les $n + 1$ points où le plus grand des deux écarts est atteint par le polynome correspondant; $P - Q$ change de signe et admet une racine positive dans chaque intervalle de ces points et il n'y en a pas d'autre.

Il suit de là que les coefficients de $P - Q$ sont différents de zéro et de signes alternés. Les deux polynomes P et $P - Q$ ont un terme commun $a_i x^{\alpha_i}$; mais, avant lui, il y a un terme $(A_k x^{\alpha_k})$ en plus dans P que dans $P - Q$. Donc les premiers termes de P et de $P - Q$ sont de signes contraires, et le signe du premier terme de $P - Q$ est $(-1)^{k+1}$.

Ce signe est celui de $P - Q$ pour x infiniment petit, donc aussi au point x_0, car (au cas où $x_0 \neq 0$) il n'y a pas de racine entre 0 et x_0. Il vient donc

$$\text{signe}[P(x_0) - Q(x_0)] = \text{signe}(-1)^{k+1}.$$

Ceci exige $M > L$, car, si $M < L$, x_0 serait le premier point où P atteint l'écart L, donc avec le signe initial $(-1)^k$ qui est celui de a_0. Ce signe serait celui du premier membre de l'équation précédente, car $|Q|$ est $< L$; donc les deux membres de cette relation seraient de signes contraires.

Je vais maintenant, pour achever la démonstration, prouver que les deux écarts M et L ne peuvent pas être égaux.

Supposons, par impossible, $M = L$. D'après ce qu'on vient de dé-

montrer, cette égalité subsistera si l'on donne à β une suite de valeurs décroissantes tendant vers α_0. Dans ce cas, Q tend vers P (sinon P ne serait pas unique) [1]. Supposons β infiniment voisin de α_0; les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où P atteint l'écart et ceux $y_0, y_1, \ldots, y_n$ où Q atteint le même écart respectivement avec le même signe seront deux à deux infiniment voisins (ou confondus). Alors P — Q a une racine dans chaque intervalle x_i, y_i (ou confondue avec ces deux points), cela fait $n - 1$ racines.

C'est impossible si $\alpha_0 > 0$, car alors x_0, y_0 et ces $n + 1$ racines seraient positives. C'est encore impossible si x_0, y_0 et la première racine sont nuls (ce qui exige $\alpha_0 = 0$), car cela entraîne $a_0 = b_0 = \pm L$, de sorte que P — Q perd son premier terme et ne peut plus avoir que $n - 1$ racines positives : la contradiction subsiste.

Théorème. — *Si l'on remplace un exposant $\alpha_i < \alpha_k$ par un autre plus petit β, l'écart augmente.*

Dans ce cas, on a

$$P - Q = (a_0 - b_0)x^{\alpha_0} + \ldots - b x^{\beta} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} + \ldots.$$

Le terme $a_i x^{\alpha_i}$, commun à P et à P — Q est précédé d'un terme de plus (en x^{β}) dans P — Q que dans P. Les premiers termes de P et de P — Q sont donc de signes contraires et la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

On est ainsi conduit à la conclusion suivante :

Théorème. — *Si l'on considère le polynome d'approximation de zéro relatif à la suite des exposants $\alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_n$ et contenant le terme assigné $A_k x^{\alpha_k}$, l'écart dépend du choix des autres exposants, mais il augmente si l'on fait croître les exposants plus grands que α_k et décroître ceux qui sont plus petits.*

---

[1] De la suite des Q, on pourrait extraire une suite convergeant vers $P' \neq P$.

LA DÉFORMATION DES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE CONFORME RÉEL A $n \geqq 5$ DIMENSIONS;

PAR M. E. CARTAN.

J'ai étudié, dans un Mémoire précédent [1], le problème de la déformation des hypersurfaces à $n-1$ dimensions dans l'espace euclidien à n dimensions; j'ai montré qu'en général deux hypersurfaces applicables l'une sur l'autre (avec conservation des longueurs d'arcs) sont égales ou symétriques, ce qui revient à dire qu'une hypersurface est en général *indéformable* dans un espace euclidien à plus de trois dimensions; j'ai indiqué également les catégories d'hypersurfaces qui font exception à la règle, c'est-à-dire qui sont *déformables*.

Un problème analogue se pose dans l'espace conforme : à la notion de deux hypersurfaces *applicables* se substitue alors la notion de deux hypersurfaces admettant une représentation *conforme* l'une sur l'autre (avec conservation des angles) : la notion d'angle subsiste en effet dans la géométrie conforme, à la différence de la notion de longueur qui disparaît. Une hypersurface *déformable dans l'espace conforme* est alors une hypersurface admettant une représentation conforme sur une autre hypersurface *qui ne se déduise pas de la première par une transformation conforme*, de même qu'une hypersurface déformable dans l'espace euclidien est une hypersurface applicable sur une autre hypersurface *qui ne se déduise pas de la première par un déplacement de l'espace euclidien*.

Dans l'espace à trois dimensions, deux surfaces quelconques admettent, comme on sait, une représentation conforme l'une sur l'autre; dans l'espace conforme à trois dimensions, toute surface est donc déformable et peut se déformer suivant toute autre

---

[1] *La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien à n dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLIV, 1916, p. 65-99).

surface. Il en est autrement dans l'espace conforme à quatre ou plus de quatre dimensions.

Je m'occupe dans le présent Mémoire du cas de $n > 4$ dimensions qui correspond, pour l'espace euclidien, à $n > 3$ dimensions. Dans l'espace conforme à $n > 4$ dimensions, une hypersurface est *en général* indéformable, de même que dans l'espace euclidien à $n > 3$ dimensions une hypersurface est en général indéformable. Les cas d'exception sont les suivants :

a. Les hypersurfaces enveloppes d'une hypersphère dépendant d'un paramètre, qui admettent une représentation conforme sur l'hypersphère.

b. Les hypersurfaces dont l'équation peut être ramenée, en coordonnées $(n+2)$ — sphériques, à la forme

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

F *étant homogène;* l'hypersurface la plus générale résultant de la déformation d'une telle hypersurface dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

c. Les hypersurfaces lieux d'une variété sphérique à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Les hypersurfaces applicables dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

d. Les hypersurfaces enveloppes d'une hypersphère à deux paramètres u et v lorsque les coordonnées $(n+2)$ — sphériques $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ de cette hypersphère,

$$\alpha(x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2\alpha_1 x_1 - \ldots - 2\alpha_n x_n + \alpha_{n+1} = 0,$$

satisfont à une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \gamma f = 0$$

et que la forme

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 - \alpha\, \alpha_{n+1}$$

est la différence U — V *entre une fonction de u et une fonction de v.* Les hypersurfaces déformées dépendent essentiellement d'un paramètre; elles sont de la même catégorie, avec la même équation de Laplace, mais les fonctions U et V ont subi

une même transformation homographique à coefficients constants.

e. Il existe de plus, pour $n = 5$, des hypersurfaces appartenant à la catégorie *b* et qui admettent une représentation conforme sur d'autres hypersurfaces que celles qui résultent de leur déformation *continue* dans l'espace conforme. Le ds^2 d'une telle hypersurface est, à un facteur fini près, la somme d'un ds^2 à deux variables à courbure totale constante et d'un autre ds^2 à deux variables distinctes des premières et également à courbure totale constante.

f. Il peut exister enfin, pour $n = 5$, des hypersurfaces ne rentrant dans aucune des catégories précédentes et susceptibles d'admettre une déformation continue avec conservation des lignes de courbure. Sur ces hypersurfaces les lignes de courbure de trois quelconques des quatre familles s'assemblent en hypersurfaces à trois dimensions dépendant d'un paramètre, comme cela a lieu par exemple pour les quadriques. Ces hypersurfaces seront étudiées dans un Mémoire ultérieur.

Le cas de l'espace conforme à quatre dimensions mérite une étude à part. Je ne l'ai traité incidemment que pour les hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère. Les enveloppes d'hypersphères à un paramètre ne sont pas les seules hypersurfaces jouissant de cette propriété; les hypersurfaces les plus générales sont les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles admettant six familles de caractéristiques à deux dimensions; elles dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Ces hypersurfaces peuvent être caractérisées par une propriété géométrique simple. A chaque point M d'une hypersurface quelconque de l'espace à quatre dimensions on peut faire correspondre une surface (à deux dimensions) du second ordre, située dans l'hyperplan tangent et qui est l'*indicatrice* de l'hypersurface. Les six plans (à deux dimensions) de sections cycliques de cette indicatrice peuvent être appelés les *plans tangents ombilicaux* en M à l'hypersurface. Pour qu'une hypersurface admette une représentation conforme sur l'hypersphère, il faut et il suffit qu'il existe sur cette hypersurface six familles de surfaces (à deux dimensions) telles qu'il en passe une

et une seule de chaque famille par chaque point M de l'hypersurface et que ces six surfaces soient respectivement tangentes en M aux six plans tangents ombilicaux relatifs à ce point. Ces six familles de surfaces sont les six familles de caractéristiques dont il est question plus haut.

Les n°s 1 à 18 sont consacrés à une étude préalable de la Géométrie conforme et de quelques métriques remarquables qui trouvent leur application dans la suite du Mémoire. Ce n'est qu'à partir du n° 19 que la question de la déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme est abordée.

ESPACES NON EUCLIDIENS ET ESPACE CONFORME.

1. Considérons dans un espace à n dimensions la quadrique représentée, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{1}$$

où la forme quadratique Φ est réductible à une somme de $n+1$ carrés positifs, ou à une somme de n carrés positifs et un carré négatif.

Dans le premier cas l'espace, où l'on a distingué la quadrique (1), est ce qu'on appelle un *espace elliptique*. Dans le second cas, la portion de l'espace intérieure à la quadrique (1) (c'est-à-dire celle qui rend Φ *négatif*) constitue ce qu'on appelle un *espace hyperbolique;* les points de l'espace projectif extérieurs à la quadrique absolue sont appelés *points idéaux* de l'espace hyperbolique.

Le groupe des transformations projectives qui laissent invariante l'équation (1), ou, ce qui ne restreint pas la généralité, laissent invariante la forme Φ, est le *groupe des déplacements* de l'espace elliptique ou hyperbolique : il est à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Étant donnés deux points M et M′ de l'espace elliptique ou hyperbolique, le rapport anharmonique de ces points et des deux points d'intersection A, B de la droite MM′ avec la quadrique absolue constitue un invariant pour le groupe des déplacements.

Si l'on désigne par k une constante donnée, positive dans le cas de l'espace elliptique, négative dans le cas de l'espace hyperbolique, on définit une *métrique de courbure* k de cet espace en appelant *distance* (*cayleyenne*) des deux points M, M', le produit par $\frac{1}{2\sqrt{-k}}$ du logarithme du rapport anharmonique

$$\frac{M'A}{M'B} : \frac{MA}{MB};$$

cette distance est essentiellement réelle. A ce point de vue, les points de la quadrique absolue sont les *points à l'infini* de l'espace (hyperbolique).

2. On peut calculer facilement la distance (cayleyenne) des deux points M, M', ainsi que l'élément d'arc ds, en se servant d'une notation symbolique simple. Désignons par une lettre majuscule M l'ensemble de $n+1$ coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, un point géométrique étant ainsi représenté aussi bien par M que par aM, où a est un coefficient numérique quelconque. Posons

$$M \mid M = \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1});$$

$$M \mid M' = \frac{1}{2}\left(x'_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + x'_{n+1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+1}}\right).$$

L'expression $M \mid M'$ (*produit géométrique* des deux points M, M') est invariante vis-à-vis de toute substitution linéaire conservant Φ, c'est-à-dire vis-à-vis du groupe des déplacements de l'espace, elliptique ou hyperbolique. Dans le cas de l'espace elliptique, le carré géométrique $M \mid M$ est essentiellement positif; dans le cas de l'espace hyperbolique, il est négatif si M est un point réel de l'espace, positif si c'est un point idéal, nul si c'est un point à l'infini.

On peut toujours supposer choisies les coordonnées d'un point réel M de l'espace, elliptique ou hyperbolique, de manière à avoir

$$(2) \qquad M \mid M = \frac{1}{k};$$

on peut aussi supposer, dans le cas de l'espace hyperbolique, que les coordonnées des points réels sont choisies de manière à avoir,

quels que soient les points réels M et M′,

$$M \mid M' < 0.$$

Cela posé, si A et B sont les deux points à l'infini de la droite MM′ (réels si l'espace est hyperbolique, imaginaires conjugués si l'espace est elliptique), on peut poser

$$M = \lambda A + \mu B, \qquad M' = \lambda' A + \mu' B$$

avec, d'après (2),

$$\lambda\mu\, A \mid B = \frac{1}{2k}, \qquad \lambda'\mu'\, A \mid B = \frac{1}{2k}.$$

On a alors

$$M \mid M' = (\lambda\mu' + \mu\lambda')\, A \mid B.$$

Or, par définition, δ étant la distance cayleyenne MM′, on a

$$\frac{\lambda\mu'}{e^{\delta\sqrt{-k}}} = \frac{\mu\lambda'}{e^{-\delta\sqrt{-k}}} = \sqrt{\lambda\mu\lambda'\mu'},$$

d'où

$$(3) \qquad M \mid M' = \frac{1}{k}\,\mathrm{ch}\left(\delta\sqrt{-k}\right) \qquad (k < 0),$$

$$= \frac{1}{k}\cos\left(\delta\sqrt{k}\right) \qquad (k > 0),$$

d'où enfin, plus généralement, si l'on ne suppose plus la relation (2) vérifiée,

$$(3') \quad \begin{cases} \cos\left(\delta\sqrt{k}\right) = \dfrac{M \mid M'}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}} & \text{(espace elliptique)};\\[2ex] \mathrm{ch}\left(\delta\sqrt{-k}\right) = -\dfrac{M \mid M'}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}} & \text{(espace hyperbolique)}. \end{cases}$$

Dans le cas de l'espace elliptique, la longueur totale d'une droite indéfinie est $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

3. Supposons maintenant M′ infiniment voisin de M et la relation (2) vérifiée; nous aurons

$$M \left| \left(M + dM + \frac{1}{2} d^2 M + \ldots\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2} k\delta^2 + \ldots\right);\right.$$

or de (2) on déduit

$$M \mid dM = 0,$$

puis

$$M \mid d^2 M = - dM \mid dM;$$

il en résulte

$$(4) \qquad \delta^2 = ds^2 = dM \mid dM,$$

relation qui n'est vraie que si l'on suppose le point variable M choisi de manière que son carré géométrique soit égal à $\frac{1}{k}$. Plus généralement, si l'on suppose ce carré géométrique *constant*, on aura

$$ds^2 = \frac{dM \mid dM}{k M \mid M};$$

telle est l'expression d'un ds^2 elliptique ou hyperbolique de courbure k.

4. On définit de même l'angle cayleyen de deux droites issues d'un point réel M : soient P et Q les deux points d'intersection (idéaux si l'espace est hyperbolique) de ces droites avec l'hyperplan polaire de M par rapport à la quadrique (1); on peut supposer choisies leurs coordonnées de manière à avoir

$$P \mid P = 1, \qquad Q \mid Q = 1;$$

l'angle φ des deux droites, qui peut se définir par le logarithme d'un rapport anharmonique, satisfait à la relation

$$\cos \varphi = P \mid Q.$$

5. Passons maintenant à la notion d'espace conforme. Considérons un espace euclidien à n dimensions rapporté à un système de coordonnées rectangulaires; l'équation de toute hypersphère est de la forme

$$(5) \qquad a_{n+1}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2a_1 x_1 - \ldots - 2a_n x_n + a_{n+2} = 0,$$

chaque hypersphère étant définie par un système de $n + 2$ coordonnées homogènes $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2})$. La condition pour que l'hypersphère soit de rayon nul est

$$\Omega(a_1, \ldots, a_{n+2}) \equiv a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - a_{n+1} a_{n+2} = 0.$$

L'hypersphère est réelle si la forme quadratique Ω est positive, elle est imaginaire si la forme quadratique Ω est négative.

A une hypersphère de rayon nul correspond en général un point bien déterminé, qui est son centre, et réciproquement; mais nous étendrons la notion d'hypersphère de rayon nul à tous les cas où les $n+2$ coordonnées a_i, non toutes nulles, annulent Ω, par exemple à l'hypersphère $(0, \ldots, 0, 1)$ (point à l'infini).

L'espace conforme est formé de toutes les hypersphères de rayon nul.

Le *groupe conforme* est formé de toutes les transformations linéaires effectuées sur les variable $a_1, \ldots, a_{n+2}$, et laissant invariante l'équation $\Omega = 0$ ou, ce qui ne restreint pas la généralité, laissant invariante la forme quadratique Ω. C'est un groupe ponctuel transformant les hypersphères en hypersphères.

Si l'on désigne par une lettre majuscule A une hypersphère ou plutôt l'ensemble de $n+2$ coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2})$, on définit les symboles $A \mid A$ et $A \mid A'$ par les égalités

$$A \mid A = \Omega(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}),$$

$$A \mid A' = \frac{1}{2}\left(a'_1 \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + a'_2 \frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \ldots + a'_{n+2} \frac{\partial\Omega}{\partial a_{n+2}}\right).$$

L'équation

$$A \mid A' = 0$$

exprime que les deux hypersphères A et A' sont *orthogonales*. Les hypersphères réelles sont caractérisées par un carré géométrique positif, les hypersphères imaginaires par un carré géométrique négatif. Si φ est l'angle de deux hypersphères réelles sécantes A, A', on a

$$\cos\varphi = \frac{A \mid A'}{\sqrt{A \mid A . A' \mid A'}}.$$

6. Il y a une correspondance remarquable entre un espace conforme E à n dimensions et un espace hyperbolique $\mathcal{E}$ à $n+1$ dimensions. Si en effet on regarde $(a_1, \ldots, a_{n+2})$ comme des coordonnées homogènes d'un espace à $n+1$ dimensions, l'équation

$$\Omega(a_1, \ldots, a_{n+2}) = 0$$

définit une quadrique de cet espace et les points intérieurs à cette

quadrique constituent un espace hyperbolique $\mathcal{E}$. A une hypersphère réelle de E correspond un point idéal de $\mathcal{E}$, à une hypersphère imaginaire de E correspond un point réel de $\mathcal{E}$, à une hypersphère de rayon nul ou hypersphère-point de E correspond un point à l'infini de $\mathcal{E}$: les points de l'espace conforme E sont donc représentés d'une manière uni-univoque par les points à l'infini de $\mathcal{E}$. Enfin au groupe conforme correspond le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$.

A une hypersphère A correspond dans $\mathcal{E}$ un point α; mais on peut regarder A comme un lieu de points M; les hypersphères-points M admettant ces points M pour centres sont caractérisées par la condition d'être orthogonales à A :

$$A \mid M = 0:$$

elles sont donc représentées dans $\mathcal{E}$ par les points de la quadrique absolue qui sont dans l'hyperplan polaire de α par rapport à cette quadrique.

De même, une variété sphérique (S) à $n - p$ dimensions de E peut être envisagée à deux points de vue : en premier lieu comme intersection d'hypersphères $A_1, \ldots, A_p$ ou base d'un faisceau linéaire d'hypersphères, et alors il lui correspond dans $\mathcal{E}$ une variété linéaire π_{p-1} à $p - 1$ dimensions, celle qui est déterminée par les points $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ qui correspondent à $A_1, \ldots, A_p$; en second lieu (S) peut être regardée comme un lieu de points, centres d'hypersphères de rayon nul, et alors il lui correspond dans $\mathcal{E}$ l'intersection de la quadrique absolue avec la variété linéaire π'_{n-p+1} conjuguée de π_{p-1} par rapport à la quadrique absolue.

En particulier à une circonférence de E correspondent d'abord une variété linéaire π_{n-2} à $n - 2$ dimensions, ensuite l'intersection de la quadrique absolue avec une variété linéaire à deux dimensions; cette intersection est une conique et il est bien évident que le rapport anharmonique de quatre points de la circonférence de E est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de la conique de $\mathcal{E}$. Comme ce dernier est invariant vis-à-vis du groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, le premier est invariant vis-à-vis du groupe conforme de E.

Le rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence se conserve donc par le groupe conforme.

7. Il n'y a pas de *métrique* dans l'espace conforme. A la vérité l'expression $dM|dM$ se reproduit par les transformations du groupe conforme, mais dans les coordonnées de l'hypersphère-point M il reste un facteur indéterminé, qu'il n'y a aucune raison de choisir d'une manière plutôt que d'une autre; si l'on choisit $a_{n+1} = 1$, $dM|dM$ est le ds^2 euclidien. Du reste dans l'espace $\mathcal{E}$ deux points de la quadrique absolue n'ont aucun invariant vis-à-vis du groupe des déplacements hyperboliques.

Il n'en est plus de même si l'on fait choix dans l'espace conforme d'une hypersphère A, qu'on appellera l'*hypersphère absolue*. A cette hypersphère correspond dans $\mathcal{E}$ un point α : soit π l'hyperplan polaire de α par rapport à la quadrique absolue. A tout point μ de la quadrique absolue on peut faire correspondre sa projection ν faite du point α sur l'hyperplan π; réciproquement, à tout point ν de π correspondent *deux* points de la quadrique absolue, à savoir les points d'intersection de cette quadrique avec la droite $\alpha\nu$. Il y a donc une correspondance bi-univoque entre les points de la quadrique absolue et les points de l'hyperplan π. Mais cet hyperplan π peut être regardé comme un espace à n dimensions, *elliptique* s'il ne coupe pas la quadrique absolue de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si α est un point réel de $\mathcal{E}$, *hyperbolique* s'il coupe la quadrique absolue de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire si α est un point idéal de $\mathcal{E}$.

En définitive, *nous avons donc établi une correspondance bi-univoque entre les points de l'espace conforme* E *dans lequel on a choisi une hypersphère absolue* A, *et les points d'un espace à n dimensions* π, *elliptique si* A *est imaginaire, hyperbolique si* A *est réelle.* A un hyperplan à $n-1$ dimensions de π correspondent dans $\mathcal{E}$ les points d'intersection de la quadrique absolue avec un hyperplan à n dimensions passant par α, c'est-à-dire dans E *les points d'une hypersphère orthogonale à* A, et réciproquement. A une droite de π correspond donc une circonférence de E orthogonale à l'hypersphère absolue; aux deux points à l'infini de cette droite correspondent les deux points d'intersection de cette circonférence avec l'hypersphère A.

Soient M, M′ deux points de l'espace conforme E; C et D les

points d'intersection de A avec la circonférence qui lui est orthogonale et qui passe par M et M'. Soient maintenant μ, μ', γ, δ les points de la quadrique absolue de $\mathcal{E}$ qui correspondent à M, M', C, D; ces quatre points sont sur une même conique. Soient enfin ν, ν', γ, δ les projections de μ, μ', γ, δ faites du point α sur l'hyperplan π (espace e).

Il existe une relation simple entre le rapport anharmonique des quatre points en ligne droite ν, ν', γ, δ et le rapport anharmonique des quatre points de la conique μ, μ', γ, δ (c'est-à-dire le rapport anharmonique des quatre points de la circonférence M, M', C, D). En effet si μ parcourt la conique, on peut poser

$$\mu = \alpha + x\gamma + y\delta,$$
$$\nu = x\gamma + y\delta;$$

en exprimant que μ est sur la quadrique absolue de $\mathcal{E}$ on obtient

$$0 = \alpha \mid \alpha + 2xy\gamma \mid \delta,$$

et par suite le produit xy reste constant; les coordonnées de μ s'expriment donc en fonctions rationnelles du paramètre y dont les valeurs pour γ et δ sont respectivement 0 et ∞; par suite le rapport anharmonique des points μ, μ', γ, δ est

$$\frac{y'}{y};$$

d'autre part le rapport anharmonique des points ν, ν', γ, δ est

$$\frac{y'}{x'} : \frac{y}{x} = \frac{xy'}{x'y} = \frac{xy'.x'y'}{x'y.xy} = \frac{y'^2}{y^2};$$

c'est donc le carré du précédent. Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer géométriquement sans difficulté.

8. Si l'on définit dans l'espace elliptique ou hyperbolique π une métrique de courbure k, comme il a été dit plus haut, on définira par cela même une métrique dans l'espace E où l'on a fait choix d'une hypersphère absolue A, la distance de deux points M, M de E étant par définition la distance des deux points correspondants ν, ν' de π. On voit d'après le théorème précédent que *la distance des deux points* M, M' *devra être définie comme l*

produit par $\frac{1}{\sqrt{-k}}$ *du logarithme du rapport anharmonique des deux points* M *et* M' *avec les deux points d'intersection de l'hypersphère* A *avec la circonférence qui lui est orthogonale et qui passe par* M *et* M'.

L'espace conforme E, *où l'on a fait choix de l'hypersphère absolue* A *et où l'on a défini la distance de deux points comme il vient d'être dit, est ce qu'on appelle un « espace sphérique » (si* A *est imaginaire) ou « pseudo-sphérique » (si* A *est réelle) de courbure* k. Il y a une correspondance bi-univoque entre les points d'un espace sphérique et ceux d'un espace elliptique, entre les points d'un espace pseudo-sphérique et ceux d'un espace hyperbolique. A une circonférence orthogonale à l'hypersphère absolue d'un espace sphérique ou pseudo-sphérique correspond une droite de l'espace elliptique ou hyperbolique; *la longueur totale d'une circonférence d'un espace sphérique de courbure* k *est* $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, *celle de la droite de l'espace elliptique de même courbure* k *est* $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

9. Le ds^2 d'un espace sphérique ou pseudo-sphérique se calcule facilement. Choisissons les coordonnées de A de manière à avoir

$$A \mid A = -\frac{1}{k};$$

toute hypersphère-point M peut se mettre sous la forme

$$M = A + N,$$

N étant une hypersphère orthogonale à A (celle qui a pour image le point ν); M | M étant nul, on en déduit

$$N \mid N = \frac{1}{k}.$$

Le ds^2 de l'espace π est par suite [formule (3)]

$$dN \mid dN = dM \mid dM.$$

Le ds^2 *de l'espace sphérique ou pseudo-sphérique de courbure* k *est donc représenté par le carré géométrique*

$dM \mid dM$, *où les coordonnées de l'hypersphère-point* M *sont choisies de manière que* $M - A$ *soit orthogonale à* A, *le carré* $A \mid A$ *étant égal à* $-\frac{1}{k}$.

On a aussi la formule générale

$$ds^2 = -\frac{A \mid A \,.\, dM \mid dM}{k(M \mid A)^2},$$

et le second membre est indépendant du choix des coordonnées de A *et de* M.

10. Nous avons supposé jusqu'à présent l'hypersphère A de rayon non nul. Si $A \mid A = 0$, on peut définir une métrique de l'espace conforme en choisissant les coordonnées de l'hypersphère-point M de manière que $M \mid A$ soit égal à une constante donnée et poser

$$ds^2 = dM \mid dM.$$

Le ds^2 obtenu est celui d'un espace euclidien à n dimensions. Choisissons en effet n hypersphères réelles $A_1, \ldots, A_n$ passant par A et orthogonales entre elles

$$A_i \mid A_j = 0, \qquad A_i \mid A_i = 1,$$

et soit B le point d'intersection autre que A de ces n hypersphères, l'hypersphère-point B ayant ses coordonnées choisies de manière à satisfaire à $A \mid B = 1$. Si alors

$$M = y_{n+1} A + y_1 A_1 + \ldots + y_n A_n + y_{n+2} B,$$

on aura

$$M \mid M = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + 2 y_{n+1} y_{n+2} = 0$$

et

$$M \mid A = y_{n+2}.$$

Si donc on choisit y_{n+2} constant, on aura

$$dM \mid dM = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2.$$

A un hyperplan de l'espace euclidien à n dimensions, défini par une équation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n + b = 0,$$

correspond l'hypersphère

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + b A,$$

lieu des points M dont les coordonnées y_i satisfont à la même relation. C'est une hypersphère passant par A.

Tout ce qui précède devient du reste évident si par une inversion on rejette le point A à l'infini.

Le sous-groupe conforme qui laisse invariante l'hypersphère absolue A correspond au groupe des déplacements et des homothéties de l'espace euclidien : le ds^2 est ici un invariant *relatif*, cet invariant pouvant se reproduire multiplié par une constante.

11. Considérons maintenant dans l'espace hyperbolique $\mathcal{E}$ deux variétés linéaires conjuguées par rapport à la quadrique absolue, l'une (α) à p dimensions, l'autre (β) à $n-p$ dimensions. Par tout point μ de $\mathcal{E}$, et en particulier par tout point μ de la quadrique absolue, passe une droite et une seule rencontrant (α) en un point σ et (β) en un point τ. Supposons que (α) ne rencontre pas la quadrique absolue, alors (β) la rencontre. On peut choisir les coordonnées de μ de manière à avoir

$$\mu = \sigma + \tau,$$

avec

$$\sigma \mid \sigma = \frac{1}{k},$$

et par suite

$$\tau \mid \tau = -\frac{1}{k}.$$

Cela permet de définir sur la quadrique absolue une métrique par l'équation

$$ds^2 = d\mu \mid d\mu = d\sigma \mid d\sigma + d\tau \mid d\tau;$$

le ds^2 est ainsi la somme d'un ds^2 de courbure k et d'un ds^2 de courbure $-k$.

Si l'on passe de l'espace $\mathcal{E}$ à l'espace conforme E, le point μ correspond à un point M de l'espace conforme, le point σ à une hypersphère réelle S et le point τ à une hypersphère imaginaire T et l'on a

$$dM \quad dM = dS \mid dS + dT \mid dT.$$

L'hypersphère S fait partie d'un faisceau linéaire p fois infini d'hypersphères, admettant pour *base* une variété sphérique réelle à $n-p-1$ dimensions (A) [celle qui correspond à (α)]; l'hypersphère T fait partie d'un faisceau linéaire $n-p$ fois infini d'hypersphères, orthogonal au premier, admettant pour base une variété sphérique imaginaire à $p-1$ dimensions (B). Si l'hypersphère T reste fixe, l'hypersphère S variant, le point $M = S + T$ se trouve sur toutes les hypersphères du second faisceau orthogonales à T et par suite décrit leur intersection qui est une variété sphérique à p dimensions passant par (B), et dans cette variété sphérique on a distingué le lieu des points qui se trouvent sur T, c'est-à-dire l'hypersphère (B) qui joue le rôle d'hypersphère absolue; on voit donc bien que le premier ds^2 partiel, à savoir $dS \mid dS$, est le ds^2 qu'on obtient en faisant varier M sur une hypersphère à p dimensions passant par (B) considérée comme espace sphérique de courbure k, dont l'hypersphère absolue serait (B). De même le second ds^2 partiel $dT \mid dT$ est le ds^2 qu'on obtient en faisant varier M sur une hypersphère à $n-p$ dimensions passant par (A), considérée comme espace pseudo-sphérique de courbure $-k$, dont l'hypersphère absolue serait (A).

La décomposition de l'espace conforme au moyen de ces deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, considérées les unes comme espaces sphériques à p dimensions de courbure k, les autres comme espaces pseudo-sphériques à $n-p$ dimensions de courbure $-k$, définit ainsi une métrique de l'espace conforme. La transformation conforme la plus générale qui laisse invariante cette métrique est le produit d'une transformation laissant invariante chaque variété du premier réseau et transformant entre eux les points de cette variété comme un déplacement de l'espace sphérique à p dimensions, par une transformation laissant invariante chaque variété du second réseau et transformant entre eux les points de cette variété comme un déplacement de l'espace pseudo-sphérique à $n-p$ dimensions. Toutes ces transformations forment un groupe semi-simple à $\frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ paramètres.

Par exemple, dans l'espace à trois dimensions, le faisceau des plans qui passent par Oz et le réseau orthogonal des circonférences

d'axe Oz conduit au ds^2 suivant :

$$ds^2 = \frac{dr^2 + dz^2}{r^2} + d\theta^2,$$

où $\frac{dr^2 + dz^2}{r^2}$ est le ds^2 d'un plan pseudo-sphérique de courbure -1 avec l'axe des z comme absolu, et où $d\theta^2$ est le ds^2 d'une circonférence considérée comme espace sphérique à une dimension de courbure 1, l'absolu étant l'ensemble de deux points cycliques à l'infini. Les coordonnées r, z, θ sont les coordonnées cylindriques ordinaires.

12. Nous avons supposé implicitement que la variété linéaire (α) n'était pas tangente à la quadrique absolue. Si elle est tangente à la quadrique absolue, il en est de même de la variété conjuguée (β) et ces deux variétés ont un point commun, le point de contact. Les deux faisceaux linéaires d'hypersphères S et T ont alors en commun une hypersphère-point A ; soient alors

$$\lambda A + \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_p B_p$$

le premier faisceau,

$$\mu A + \mu_1 C_1 + \ldots + \mu_{n-p} C_{n-p}$$

le second faisceau et soit enfin D le point d'intersection autre que A des n hypersphères B_i et C_j, choisi de manière à avoir

$$A \mid D = 1.$$

Si l'on choisit les coordonnées d'une hypersphère-point M de manière que $M \mid A$ soit égal à une constante donnée, on aura

$$M = D + \sum_{i=1}^{i=p} x_i B_i + \sum_{j=1}^{j=n-p} y_j C_j - \frac{1}{2} \sum (x_i^2 + y_j^2) A$$

et

$$dM \mid dM = \sum_{i=1}^{i=p} dx_i^2 + \sum_{j=1}^{j=n-p} dy^2.$$

On a ainsi une métrique pour laquelle le ds^2 est la somme de deux ds^2 à courbure nulle, l'un à p dimensions, l'autre à $n - p$ dimensions. Le premier ds^2 partiel est celui qu'on obtient lorsque

le point M décrit la variété sphérique intersection des hypersphères $C_1 - y_1 A, \ldots, C_{n-p} - y_{n-p} A$, considérée comme espace euclidien à p dimensions, le point à l'infini étant A; le second ds^2 partiel est celui qu'on obtient lorsque le point M décrit la variété sphérique intersection des hypersphères $B_1 - x_1 A, \ldots, B_p - x_p A$, considérée comme espace euclidien à $n-p$ dimensions, le point à l'infini étant A. Si par une inversion on rejette A à l'infini, l'espace conforme est décomposé suivant deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles à p et $n-p$ dimensions.

Les transformations conformes qui laissent cette décomposition de l'espace invariante s'obtiennent en multipliant une transformation par déplacement et homothétie d'un espace euclidien à p dimensions par une transformation par déplacement et homothétie d'un espace euclidien à $n-p$ dimensions, mais cette génération n'est pas unique; le groupe considéré est à

$$\frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} + 1 \text{ paramètres.}$$

LES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE MOBILES DANS LES ESPACES ELLIPTIQUE ET HYPERBOLIQUE, CONFORME, SPHÉRIQUE ET PSEUDO-SPHÉRIQUE.

13. Prenons dans un espace elliptique ou hyperbolique un système de référence mobile formé de $n+1$ points $M, M_1, \ldots, M_n$ satisfaisant à

$$(5) \qquad M \mid M = \frac{1}{k}, \qquad M_i \mid M_i = 1, \qquad M \mid M_i = M_i \mid M_j = 0, \qquad (i \neq j).$$

Un tel système dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Si l'on donne à ces paramètres une variation infiniment petite, on aura des formules de la forme suivante :

$$(6) \qquad \begin{cases} dM = \varpi_{00} M + \varpi_{01} M_1 + \ldots + \varpi_{0n} M_n, \\ dM_1 = \varpi_{10} M + \varpi_{11} M_1 + \ldots + \varpi_{1n} M_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dM_n = \varpi_{n0} M + \varpi_{n1} M_1 + \ldots + \varpi_{nn} M_n, \end{cases}$$

où les ϖ_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des paramètres (expressions de Pfaff). Si l'on exprime que

les relations (5) sont vérifiées identiquement, on obtient par différentiation

$$\varpi_{00} = 0, \qquad \varpi_{ii} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\varpi_{i0} = -k\varpi_{i0}, \qquad \varpi_{ij} = -\varpi_{ji} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n),$$

ce qui permet d'écrire

$$(6') \qquad \begin{cases} dM = \omega_1 M_1 + \omega_2 M_2 + \ldots + \omega_n M_n, \\ dM_1 = -k\omega_1 M + \varpi_{12} M_2 + \ldots + \varpi_{1n} M_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dM_n = -k\omega_n M + \varpi_{n1} M_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} M_{n-1}, \end{cases}$$

où $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$. Il ne reste donc que $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff comme coefficients dans les seconds membres.

Le ds^2 de l'espace, considéré comme à courbure k, est alors

$$ds^2 = dM \mid dM = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

Si l'on exprime que les équations (6') sont complètement intégrables, c'est-à-dire que les covariants bilinéaires des seconds membres sont identiquement nuls, on obtient les relations

$$(7) \qquad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + [\omega_2 \varpi_{2i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi'_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + [\varpi_{i2} \varpi_{2j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}]: \end{cases}$$

ce sont les formules de structure du groupe des déplacements de l'espace, elliptique ou hyperbolique, considéré.

Les formules (6') et (7) s'appliquent aussi à l'espace euclidien, en y faisant $k = 0$ et en supposant que $M_1, \ldots, M_n$ désignent n vecteurs unités rectangulaires, M étant un point.

14. Les formules (7) permettent de reconnaître à quelles conditions une forme quadratique définie positive des différentielles de n variables $u_1, \ldots, u_n$ (les coefficients étant des fonctions de ces variables) est le ds^2 d'un espace de courbure constante k. Cette forme quadratique peut toujours en effet être mise sous la forme $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$. Les covariants bilinaires $\omega'_1, \ldots, \omega'_n$, s'annulant nécessairement en même temps que $\omega_1, \ldots, \omega_n$, peuvent

toujours être mis sous la forme

$$(8) \qquad \omega'_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}],$$

où les ϖ_{ij} sont n^2 nouvelles expressions de Pfaff convenablement choisies. On peut du reste, sans changer les formules (8), remplacer ϖ_{ij} par

$$\varpi_{ij} + \alpha_{ij1}\omega_1 + \ldots + \alpha_{ijn}\omega_n,$$

où les n^3 coefficients α_{ijk} satisfont à

$$\alpha_{ijk} = \alpha_{kji}.$$

On voit sans difficulté qu'on peut disposer de ces coefficients, d'une manière et d'une seule, de façon à avoir

$$\varpi_{ii} = 0, \qquad \varpi_{ij} + \varpi_{ji} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n).$$

Cela posé, pour que l'expression $\Sigma\omega_i^2$ soit le ds^2 d'un espace de courbure k, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer, en fonction des n variables $u_1, \ldots, u_n$, les coordonnées d'un point variable M de l'espace, de manière à avoir

$$(9) \qquad M \mid M = \frac{1}{k}, \qquad dM \mid dM = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

On pourra alors toujours poser

$$dM = \omega_1 M_1 + \ldots + \omega_n M_n,$$

où M_i sont des points convenablement choisis et les conditions (9) donnent

$$M \mid M_i = 0, \qquad M_i \mid M_i = 1, \qquad M_i \mid M_j = 0.$$

On a donc ainsi un système de référence mobile et par suite, d'après (6'), des formules telles que

$$dM_i = -k\omega_i M + \overline{\varpi}_{i1} M_1 + \ldots + \overline{\varpi}_{in} M_n;$$

les formules (7) et (8) montrent alors que les $\overline{\varpi_{ij}}$ ne sont autres

que les ϖ_{ij}, d'où l'on déduit, d'après (7),

$$(10)\quad \varpi'_{ij} = -k[\omega_i\omega_j] + [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in}\varpi_{nj}] \qquad (i, j = 1, \ldots n).$$

Les relations (10) fournissent les conditions nécessaires pour que le ds^2 donné soit de courbure k. Ces conditions sont suffisantes, car si elles sont vérifiées le système de Pfaff (6') est complètement intégrable, puisque les covariants bilinéaires des deux membres de ses équations sont, d'après (8) et (10), égaux en tenant compte de ces équations elles-mêmes.

En définitive, *l'expression* $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$ *est un* ds^2 *de courbure* k *si les expressions* $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$ *définies par* (8) *satisfont à* (10).

15. Passons à l'espace conforme. Choisissons comme système de référence mobile une hypersphère-point M, puis n hypersphères réelles orthogonales entre elles $A_1, \ldots, A_n$, enfin l'hypersphère-point N dont le centre est le deuxième point d'intersection de ces n hypersphères. Nous pouvons de plus supposer qu'on a

$$(11)\qquad A_i \mid A_i = 1, \qquad M \mid N = 1,$$

en même temps que

$$(12)\quad M \mid M = 0, \qquad N \mid N = 0, \qquad M \mid A_i = 0, \qquad N \mid A_i = 0, \qquad A_i \mid A_j = 0.$$

Un tel système de référence dépend de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres et, en tenant compte des relations (11) et (12), on voit qu'on peut poser

$$(13)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\chi_1 M - \omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\chi_n M - \omega_n N + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = -\theta N + \chi_1 A_1 + \chi_2 A_2 + \ldots + \chi_n A_n, \end{cases}$$

avec

$$\varpi_{ij} + \varpi_{ji} = 0.$$

Il s'introduit ainsi dans les second membres $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ expressions de Pfaff θ, ω_i, χ_i, ϖ_{ij}. En prenant les covariants bilinéaires des deux membres de (13) on arrive aux formules de struc-

ture du groupe conforme

$$
(14)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\theta' & = -[\omega_1\chi_1] - [\omega_2\chi_2] - \ldots - [\omega_n\chi_n], \\
\omega'_1 & = \quad [\theta\omega_1] \quad + [\omega_2\varpi_{21}] + \ldots + [\omega_n\varpi_{n1}], \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\omega'_n & = \quad [\theta\omega_n] \quad + [\omega_1\varpi_{1n}] + \ldots + [\omega_{n-1}\varpi_{n-1,n}], \\
\chi'_1 & = \quad [\chi_1\theta] \quad + [\chi_2\varpi_{21}] + \ldots + [\chi_n\varpi_{n1}], \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\chi'_n & = \quad [\chi_n\theta] \quad + [\chi_1\varpi_{1n}] + \ldots + [\chi_n\varpi_{n-1,n}], \\
\varpi'_{ij} & = \quad [\omega_j\chi_i] - [\omega_i\chi_j] + [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in}\varpi_{nj}].
\end{array}
\right.
$$

16. Prenons maintenant un espace sphérique ou pseudo-sphérique de courbure k, au moyen d'une hypersphère absolue. Le point M étant un point mobile quelconque, choisissons les hypersphères $A_1, \ldots, A_n$ passant par M, orthogonales entre elles et orthogonales à l'hypersphère absolue; soit N le deuxième point d'intersection de ces hypersphères. L'hypersphère absolue est de la forme $A = \alpha M + \beta N$; choisissons-la et choisissons M et N de manière à avoir, comme il a été dit au n° 9,

$$A \mid A = M \mid A = -\frac{1}{k}$$

et

$$M \mid N = 1:$$

il vient

$$A = \frac{1}{2}M - \frac{1}{k}N = -\frac{1}{k}\left(N - \frac{k}{2}M\right).$$

Si alors nous exprimons que l'hypersphère $N - \frac{k}{2}M$ reste fixe, nous obtenons, d'après (13),

$$-\theta\left(N + \frac{k}{2}M\right) + \left(\chi_1 - \frac{k}{2}\omega_1\right)A_1 + \ldots + \left(\chi_n - \frac{k}{2}\omega_n\right)A_n = 0,$$

d'où

$$\theta = 0, \qquad \chi_i = \frac{k}{2}\omega_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Par suite, les formules qui donnent le déplacement infiniment petit du système de référence dans l'espace sphérique ou pseudo-

sphérique de courbure k sont

$$(15)\quad \begin{cases} dM = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\omega_1\left(N + \frac{k}{2} M\right) + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\omega_n\left(N + \frac{k}{2} M\right) + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = \frac{k}{2}(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_n A_n), \end{cases}$$

et les formules de structure (14) deviennent

$$(16)\quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}], \end{cases}$$

identiques aux formules de structure (7) de l'espace elliptique ou hyperbolique de même courbure.

Si $k = 0$, c'est l'hypersphère N qui est l'hypersphère absolue. Si l'on exprime que le point N (et non pas simplement l'hypersphère-point N) reste fixe, on obtient

$$\chi_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

et les formules (13) deviennent

$$(17)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n, \\ dA_1 = -\omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \ldots + \varpi_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = -\omega_n N + \varpi_{n1} A_1 + \ldots + \varpi_{n,n-1} A_{n-1}, \\ dN = -\theta N, \end{cases}$$

avec

$$(18)\quad \begin{cases} \theta' = 0, \\ \omega'_i = [\theta \omega_i] + [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{ni}], \\ \varpi'_{ij} = [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{in} \varpi_{nj}]: \end{cases}$$

ces dernières formules sont identiques aux formules de structure du groupe des déplacements et homothéties de l'espace euclidien.

L'expression θ ayant son covariant bilinéaire nul est une différentielle exacte $\frac{du}{u}$; l'hypersphère-point uN est fixe, et le ds^2 de

l'espace euclidien est, à un facteur constant près,

$$d\left(\frac{1}{u}\mathrm{M}\right) \Big| d\left(\frac{1}{u}\mathrm{M}\right) = \frac{1}{u^2}(\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2).$$

17. Considérons maintenant la métrique obtenue en décomposant l'espace conforme par deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, considérées les unes comme espaces sphériques à p dimensions de courbure k, les autres comme espaces pseudo-sphériques à $n-p$ dimensions de courbure $-k$. Étant donnée une hypersphère-point M, désignons par $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$ des hypersphères orthogonales entre elles et déterminant par leur intersection la variété du premier réseau qui passe par M; par $\mathrm{A}_{p+1}, \ldots, \mathrm{A}_n$ des hypersphères orthogonales entre elles et déterminant par leur intersection la variété du second réseau qui passe par M; soit enfin N le deuxième point d'intersection des hypersphères A_i. La base du premier réseau est définie par les hypersphères

$$\mathrm{A}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_p, \quad \mathrm{M} - h\mathrm{N},$$

la base du second réseau par les hypersphères

$$\mathrm{A}_{p+1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n, \quad \mathrm{M} + h\mathrm{N};$$

on a

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - h\mathrm{N}) + \frac{1}{2}(\mathrm{M} + h\mathrm{N}) = \mathrm{S} + \mathrm{T},$$

et l'on choisit M et N de manière à avoir

$$\mathrm{M} \mid \mathrm{N} = 1, \qquad \mathrm{S} \mid \mathrm{S} = \frac{1}{k}, \qquad \mathrm{T} \mid \mathrm{T} = -\frac{1}{k},$$

d'où

$$h = -\frac{2}{k}.$$

Si, dans les formules (13), on exprime que la base intersection de $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{N} + \frac{k}{2}\mathrm{M}$, est fixe, c'est-à-dire que la différentielle d'une quelconque de ces hypersphères est une combinaison linéaire de ces hypersphères, on obtient

$$\begin{aligned}
&\theta = 0, \\
&\varpi_{i\alpha} = 0 && (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n), \\
&\chi_i = \frac{1}{2} k\,\omega_i && (i = 1, \ldots, p), \\
&\chi_\alpha = -\frac{1}{2} k\,\omega_\alpha && (\alpha = p+1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

On a donc

$$(19)\quad \begin{cases} dM = \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \\ dA_i = -\omega_i \left(N + \frac{k}{2} M\right) + \sum_{j=1}^{j=p} \varpi_{ij} A_j \qquad (i = 1, \ldots, p), \\ dA_\alpha = -\omega_\alpha \left(N - \frac{k}{2} M\right) + \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} \varpi_{\alpha\beta} A_\beta \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n), \\ dN = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i - \frac{1}{2} k \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \end{cases}$$

avec les formules

$$(20)\quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_p \varpi_{pi}], \\ \varpi'_{ij} = -k[\omega_i \omega_j] + [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{ip} \varpi_{pj}], \\ \omega'_\alpha = [\omega_{p+1} \varpi_{p+1.\alpha}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{n\alpha}], \\ \varpi'_{\alpha\beta} = +k[\omega_\alpha \omega_\beta] + [\varpi_{\alpha,p+1} \varpi_{p+1.\beta}] + \ldots + [\varpi_{\alpha n} \varpi_{n\beta}]. \end{cases}$$

Ces formules montrent bien que le ds^2 de l'espace est la somme d'un ds^2 à p dimensions $\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2$ de courbure k, à savoir le ds^2 de l'espace elliptique $[A_{p+1} \ldots A_n]$ dont l'absolu est formé des points situés sur $N - \frac{k}{2} M$, et d'un ds^2 à $n - p$ dimensions $\omega_{p+1}^2 + \ldots + \omega_n^2$ de courbure $-k$, à savoir le ds^2 de l'espace hyperbolique $[A_1 \ldots A_p]$ dont l'absolu est formé des points situés sur $N + \frac{k}{2} M$. Ces formules (20) sont les formules de structure du sous-groupe conforme qui laisse invariants les deux réseaux orthogonaux.

18. Prenons enfin le cas particulier où les deux réseaux orthogonaux ont en commun une hypersphère de rayon nul; avec les notations du numéro précédent, ce sera N. Si l'on exprime que le faisceau d'hypersphères défini par $A_1, \ldots, A_p$, N est fixe, on obtient, d'après (13),

$$\begin{aligned} \chi_i &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, p), \\ \chi_\alpha &= 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n). \\ \varpi_{i\alpha} &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

On a donc

$$(21)\quad \begin{cases} dM = \theta M + \sum_{i=1}^{i=p} \omega_i A_i + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \omega_\alpha A_\alpha, \\ dA_i = -\omega_i N + \sum_{j=1}^{j=p} \varpi_{ij} A_j, \\ dA_\alpha = -\omega_\alpha N + \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} \varpi_{\alpha\beta} A_\beta, \\ dN = -\theta N, \end{cases}$$

avec

$$(22)\quad \begin{cases} \theta' = 0, \\ \omega'_i = [\theta\omega_i] + [\omega_1 \varpi_{1i}] + \ldots + [\omega_p \varpi_{pi}], \\ \varpi'_{ij} = [\varpi_{i1} \varpi_{1j}] + \ldots + [\varpi_{ip} \varpi_{pj}], \\ \omega'_\alpha = [\theta\omega_\alpha] + [\omega_{p+1} \varpi_{p+1,\alpha}] + \ldots + [\omega_n \varpi_{n\alpha}], \\ \varpi'_{\alpha\beta} = [\varpi_{\alpha,p+1} \varpi_{p+1,\beta}] + \ldots + [\varpi_{\alpha n} \varpi_{n\beta}]. \end{cases}$$

L'expression de Pfaff θ est une différentielle exacte $\frac{du}{u}$; le ds^2 de l'espace est, à un facteur constant près,

$$\frac{1}{u^2}(\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2) + \frac{1}{u^2}(\omega_{p+1}^2 + \ldots + \omega_n^2),$$

et chacun des deux termes est un ds^2 de courbure nulle.

LES HYPERSURFACES DE L'ESPACE CONFORME ET LEUR DÉFORMATION.

19. Soit une hypersurface (S) à $n-1$ dimensions de l'espace conforme à n dimensions. Faisons correspondre, à chaque point M de cette hypersurface, un système de référence comme au n° 5, mais *avec la restriction que l'hypersphère* A_n *soit tangente à l'hypersurface*. Pour tout déplacement de ce système de référence, on a manifestement

$$\omega_n = 0,$$

car l'hypersphère dM est constamment normale à (S). Faisons un

changement de notation en posant

$$A_n = A, \qquad \varpi_{in} = \psi_i, \qquad \chi_n = \chi \qquad (i = 1, \ldots, n-1);$$

les formules (13) et (14) deviennent

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
dM &= \theta M + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \omega_\rho A_\rho,\\
dA_i &= -\chi_i M - \omega_i N + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \varpi_{i\rho} A_\rho + \psi_i A,\\
dA &= -\chi M - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \psi_\rho A_\rho,\\
dN &= -\theta N + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \chi_\rho A_\rho + \chi A
\end{aligned}\right.$$

et

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta' &= -\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \chi_\rho],\\
\omega'_i &= [\theta\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}] && (i = 1, \ldots, n-1).\\
0 &= \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho \psi_\rho],\\
\chi'_i &= [\chi_i \theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\chi_\rho \varpi_{\rho i}] + [\psi_i \chi] && (i = 1, \ldots, n-1),\\
\chi' &= [\chi\theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\chi_\rho \psi_\rho],\\
\varpi'_{ij} &= [\omega_j \chi_i] - [\omega_i \chi_j] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\varpi_{i\rho} \varpi_{\rho j}] - [\psi_i \psi_j] && (i, j = 1, \ldots, n-1),\\
\psi'_i &= -[\omega_i \chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\psi_\rho \varpi_{\rho i}] && (i = 1, \ldots, n-1).
\end{aligned}\right.$$

20. L'expression $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2$ étant, à un facteur fini près, le ds^2 de l'hypersurface (S), les expressions $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ sont des

combinaisons linéaires (indépendantes) des différentielles des $n-1$ paramètres dont dépend la position d'un point sur (S). L'égalité, extraite de (24),

$$[\omega_1\psi_1]+[\omega_2\psi_2]+\ldots+[\omega_{n-1}\psi_{n-1}]=0$$

montre qu'il en est de même de $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$.

L'expression

$$dA \mid dM = -(\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1})$$

est donc une forme quadratique en $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. Cette forme dépend du choix du système de référence associé au point M. Si l'on change ce système, on doit remplacer M par αM et A par $A+\beta M$; la forme quadratique devient alors

$$(dA+\beta dM+d\beta M)\mid(\alpha dM+d\alpha M)=\alpha dA\mid dM+\alpha\beta\, dM\mid dM.$$

Par suite, *le faisceau de formes quadratiques*

$$\lambda(\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1})+\mu(\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_{n-1}^2)$$

est indépendant du choix du système de référence associé au point M.

Des propriétés classiques montrent qu'on peut effectuer sur $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ une substitution orthogonale, c'est-à-dire choisir les hypersphères $A_1, \ldots, A_{n-1}$, de manière à avoir l'identité

$$\omega_1\psi_1+\omega_2\psi_2+\ldots+\omega_{n-1}\psi_{n-1}=a_1\omega_1^2+a_2\omega_2^2+\ldots+a_{n-1}\omega_{n-1}^2,$$

c'est-à-dire de manière à avoir

$$\psi_i=a_i\omega_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{25}$$

Les coefficients a_i peuvent en outre être remplacés par $\lambda a_i+\mu$ en choisissant convenablement les hypersphères M et A.

Lorsque le choix des hypersphères $A_1, \ldots, A_{n-1}$ est fait de la manière précédente, les *lignes de courbure* de l'hypersurface (S) sont définies par les systèmes

$$\begin{aligned}
&\omega_2=\omega_3=\ldots=\omega_{n-1}=0,\\
&\omega_1=\omega_3=\ldots=\omega_{n-1}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_{n-2}=0;
\end{aligned}$$

en effet, *l'hypersphère* $A + a_1 M$ *tangente à l'hypersurface jouit de la propriété d'être tangente à l'hypersphère infiniment voisine* lorsqu'on se déplace de manière à annuler ω_2, $\omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$; car on a dans ces conditions

$$d(A + a_1 M) = (da_1 + a_1 \theta - \chi) M;$$

cette hypersphère $A + a_1 M$ est de plus *la première hypersphère de courbure* de (S) au point M.

21. Si l'hypersurface (S) est l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de $p \leqq n - 2$ paramètres, et si l'on choisit cette hypersphère pour hypersphère A, les expressions

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_{n-1}, \quad \chi$$

qui entrent dans dA sont au nombre de p linéairement indépendantes; par suite, p au plus des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont différents de zéro.

Montrons que si $p \leqq n - 3$ des coefficients a_i sont différents de zéro, les autres étant nuls, l'expression χ est une combinaison linéaire des ψ_i, et que par suite l'hypersphère A dépend de p paramètres. Si, en effet,

$$a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

on a, d'après (2),

$$-[\omega_{p+1}\chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} a_\rho [\omega_\rho \varpi_{\rho,p+1}] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$-[\omega_{n-1}\chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=p} a_\rho [\omega_\rho \varpi_{\rho,n-1}] = 0;$$

la première de ces formules montre que χ est une combinaison linéaire des ω_i, mais ne contient aucun terme en $\omega_{p+2}, \ldots, \omega_{n-1}$; la deuxième formule montre ensuite qu'elle ne contient aucun terme en ω_{p+1}.

Si donc $n - 1 - p \geqq 2$ *des coefficients* a_i *sont nuls, l'hypersurface* (S) *peut être regardée comme l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de* p *paramètres, à savoir l'hypersphère* A.

Si $n-1-p \geqq 2$ des coefficients a_i sont égaux entre eux et si a est leur valeur commune, l'hypersurface (S) *peut être regardée comme l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de p paramètres, à savoir l'hypersphère* $A + aM$.

Remarquons que les a_i ne sont pas autre chose que les racines de l'équation en S de la forme quadratique

$$\omega_1 \psi_1 + \omega_2 \psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \psi_{n-1}.$$

En particulier, si ces racines sont toutes égales, (S) est une hypersphère; si $n-2$ d'entre elles sont égales, la $(n-1)^{\text{ième}}$ étant différente, (S) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre.

22. Considérons une hypersurface (Σ) admettant une *représentation conforme* sur l'hypersurface (S) ou, comme on peut encore dire, résultant de la déformation de (S) dans l'espace conforme. A chaque point P de (Σ) on peut faire correspondre un système de référence formé de deux hypersphères-points P, Q et de n hypersphères-unités $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, B, de manière à avoir

$$(26) \qquad \Omega_1 = \omega_1, \qquad \Omega_2 = \omega_2, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{n-1} = \omega_{n-1},$$

les grandes lettres se rapportant à (Σ) et les petites à (S). Lorsque le système de référence associé au point M de (S) est fixé, le système de référence associé au point P de (Σ) est jusqu'à un certain point indéterminé, car on peut, sans nuire aux conditions (26), remplacer

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_{n-1}, \quad B, \quad Q,$$

par

$$B_1 + \alpha_1 P, \qquad B_2 + \alpha_2 P, \qquad \ldots, \qquad B_{n-1} + \alpha_{n-1} P, \qquad B + \alpha P,$$

$$Q - \Sigma \alpha_\rho B_\rho - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 + \alpha^2) P.$$

Les expressions

$$\Theta, \quad \Pi_{ij}, \quad \Psi_i$$

sont alors remplacées par

$$\Theta - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \alpha_\rho \omega_\rho, \qquad \Pi_{ij} + \alpha_i \omega_j - \alpha_j \omega_i, \qquad \Psi_i - \alpha \omega_i.$$

D'après cela les équations (26), quand on égale les covariants bilinéaires de leurs deux membres, entraînent les équations

$$[(\Theta - \theta)\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho(\Pi_{\rho i} - \varpi_{\rho i})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

ces équations elles-mêmes montrent que $\Theta - \theta$ et $\Pi_{ij} - \varpi_{ij}$ sont de la forme

$$\begin{aligned} &\Theta - \theta = \alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{n-1}, \\ &\Pi_{ij} - \varpi_{ij} = \alpha_j\omega_i - \alpha_i\omega_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

On peut donc, d'après la remarque faite plus haut, supposer choisies les hypersphères $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ de manière qu'on ait, non seulement les équations (26), mais encore les suivantes :

$$(27) \qquad \Theta = \theta, \qquad \Pi_{ij} = \varpi_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On pourra encore, sans nuire aux équations (26) et (27), remplacer l'hypersphère B par toute autre hypersphère tangente à (S).

LES HYPERSURFACES ADMETTANT UNE REPRÉSENTATION CONFORME SUR L'HYPERSPHÈRE.

23. Cela posé, cherchons dans quel cas l'hypersurface (S) admet une représentation conforme sur une hypersphère (ou un hyperplan qui, au point de vue conforme, n'est qu'une hypersphère particulière). Il suffit pour cela de prendre pour (Σ) une hypersurface inconnue, d'associer à chacun P de ses points le système de référence le plus général et de voir si le système de Pfaff

$$(28) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-1} = \omega_{n-1}, \\ \Omega_n = 0, \quad \Theta = \theta, \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Psi_{n-1} = 0, \\ X = 0 \end{cases}$$

admet une solution. Dans ce système, les variables indépendantes sont celles dont dépend la position d'un point M sur (S); les fonc-

tions inconnues sont les paramètres dont dépend le système de référence le plus général associé à un point P de (Σ). Les équations (28) expriment, les unes que (Σ) admet une représentation conforme sur (S), les autres (les n dernières) que (Σ) est une hypersphère (l'hypersphère B).

Prenons les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28); nous obtenons, en tenant compte de ces équations (28) elles-mêmes,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega'_i - \omega'_i \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),\\ &\Omega'_n \equiv 0,\\ &\Theta' - \theta' \equiv -\sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} [\omega_\rho(X_\rho - \chi_\rho)],\\ &\Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv [\omega_j(X_i - \chi_i)] - [\omega_i(X_j - \chi_j)] + [\psi_i\psi_j],\\ &\Psi'_i \equiv 0,\\ &X' \equiv 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'hypersurface (S) ait été rapportée à ses lignes de courbure, ou, d'une manière plus précise, qu'on ait

$$\psi_i = a_i\omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

L'expression trouvée pour $\Theta' - \theta'$ montre qu'on doit avoir

$$X_i - \chi_i = \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} b_{i\rho}\omega_\rho \qquad (b_{ij} = b_{ji}),$$

puis l'expression de $\Pi'_{ij} - \varpi'_{ij}$ montre qu'on doit avoir

$$b_{ij} = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n-1),$$

de plus

$$b_{ii} + b_{jj} = a_i a_j.$$

24. Supposons d'abord $n \geqq 5$, et soient i, j, k, l quatre des indices $1, \ldots, n-1$. Les équations

$$\begin{aligned} b_{ii} + b_{kk} &= a_i a_k,\\ b_{ii} + b_{ll} &= a_i a_l,\\ b_{jj} + b_{kk} &= a_j a_k,\\ b_{jj} + b_{ll} &= a_j a_l \end{aligned}$$

conduisent à la relation

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0.$$

Il en résulte que les a_i sont tous égaux entre eux, à l'exception d'un au plus. Si, en effet, par exemple a_1 était différent à la fois de a_2 et de a_3, les égalités

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_i) = 0,$$
$$(a_1 - a_3)(a_2 - a_i) = 0$$

montreraient que tous les autres a_i sont égaux à a_2 et à a_3, tous les a_i autres que a_1 seraient donc égaux.

Par suite ou bien l'hypersurface (S) est une hypersphère, ou bien on peut supposer $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$, c'est-à-dire (n° 21) que *l'hypersurface* (S) *est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre.*

Réciproquement si (S) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre, on peut supposer

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

tous les b_{ij} sont nuls et il faut ajouter aux équations (28) les équations nouvelles

$$(28') \qquad X_i = \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on égale alors les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28′) en tenant compte des équations (28) et (28′), on trouve

$$X'_i - \chi'_i \equiv 0;$$

par suite *le système de Pfaff formé des équations* (28) *et* (28′) *est complètement intégrable* et il existe donc une infinité d'hypersphères résultant de la déformation de (S) dans l'espace conforme.

Les hypersurfaces enveloppes d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre admettent une représentation conforme sur l'hypersphère; ce sont les seules hypersurfaces jouissant de cette propriété, si n est supérieur à 4.

25. Reste le cas $n = 4$, les trois coefficients a_1, a_2, a_3 étant *distincts*. Les différences $X_i - \chi_i$ ne sont plus alors nulles néces-

sairement et l'on a

$$(28'')\quad \begin{cases} X_1 - \chi_1 = \frac{1}{2}(a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_2 a_3)\omega_1, \\ X_2 - \chi_2 = \frac{1}{2}(a_2 a_3 + a_2 a_1 - a_3 a_1)\omega_2, \\ X_3 - \chi_3 = \frac{1}{2}(a_3 a_1 + a_3 a_2 - a_1 a_2)\omega_3, \end{cases}$$

On est ramené à étudier le système des équations de Pfaff (28) et (28″), et à voir s'il est compatible. Il faut et il suffit pour cela que les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28″) soient égaux en tenant compte des équations (28) et (28″).

Avant de faire le calcul, remarquons que les trois équations

$$\psi_i = a_i \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

conduisent, en prenant les covariants bilinéaires des deux membres, aux formules

$$\begin{aligned} &[(da_1 + a_1\theta - \chi)\omega_1] + (a_1 - a_2)[\varpi_{12}\omega_2] + (a_1 - a_3)[\varpi_{13}\omega_3] = 0, \\ &[(da_2 + a_2\theta - \chi)\omega_2] + (a_2 - a_3)[\varpi_{23}\omega_3] + (a_2 - a_1)[\varpi_{21}\omega_1] = 0, \\ &[(da_3 + a_3\theta - \chi)\omega_3] + (a_3 - a_1)[\varpi_{31}\omega_1] + (a_3 - a_2)[\varpi_{32}\omega_2] = 0. \end{aligned}$$

Ces formules montrent que ϖ_{23}, ϖ_{31}, ϖ_{12}, $d\alpha_i + a_i\theta - \chi$ sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2, ω_3, et l'on trouve sans difficulté qu'on peut poser

$$(30)\quad \begin{cases} \varpi_{23} = \dfrac{h}{a_2 - a_3}\omega_1 + h_3\omega_2 + h'_2\omega_3, \\ \varpi_{31} = h'_3\omega_1 + \dfrac{h}{a_3 - a_1}\omega_2 + h_1\omega_3, \\ \varpi_{12} = h_2\omega_1 + h'_1\omega_2 + \dfrac{h}{a_1 - a_2}\omega_3; \\ da_1 + a_1\theta - \chi = k_1\omega_1 + (a_1 - a_2)h_2\omega_2 + (a_3 - a_1)h'_3\omega_3, \\ da_2 + a_2\theta - \chi = (a_1 - a_2)h'_1\omega_1 + k_2\omega_2 + (a_2 - a_3)h_3\omega_3, \\ da_3 + a_3\theta - \chi = (a_3 - a_1)h_1\omega_1 + (a_2 - a_3)h'_2\omega_2 + k_3\omega_3. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres des équations (28″) en tenant compte de (28) et (28″) et en appelant pour abréger b_i les coefficients de ω_i dans les seconds

membres, on obtient

$$[(db_1 + 2b_1\theta - a_1\chi)\omega_1] + (b_1 - b_2)[\varpi_{12}\omega_2] + (b_1 - b_3)[\varpi_{13}\omega_3] = 0,$$
$$[(db_2 + 2b_2\theta - a_2\chi)\omega_2] + (b_2 - b_3)[\varpi_{23}\omega_3] + (b_2 - b_1)[\varpi_{21}\omega_1] = 0,$$
$$[(db_3 + 2b_3\theta - a_3\chi)\omega_3] + (b_3 - b_1)[\varpi_{31}\omega_1] + (b_3 - b_2)[\omega_{32}\omega_2] = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (30),

$$(a_2 - a_3)h[\omega_2\omega_3] + \frac{1}{2}\{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(h_3 + h'_3) + (a_1 - a_2)k_3\}[\omega_3\omega_1]$$
$$+ \frac{1}{2}\{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)(h_2 + h'_2) + (a_3 - a_1)k_2\}[\omega_1\omega_2] = 0,$$

$$(a_3 - a_1)h[\omega_3\omega_1] + \frac{1}{2}\{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(h_1 + h'_1) + (a_2 - a_3)k_1\}[\omega_1\omega_2]$$
$$+ \frac{1}{2}\{(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)(h_3 + h'_3) + (a_1 - a_2)k_3\}[\omega_2\omega_3] = 0,$$

$$(a_1 - a_2)h[\omega_1\omega_2] + \frac{1}{2}\{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)(h_2 + h'_2) + (a_3 - a_1)k_2\}[\omega_2\omega_3]$$
$$+ \frac{1}{2}\{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(h_1 + h'_1) + (a_2 - a_3)k_1\}[\omega_3\omega_1] = 0.$$

Par suite *les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'hypersurface* (S) *admette une représentation conforme sur l'hypersphère sont exprimées par les quatre relations*

$$(31)\qquad \begin{cases} h = 0, \\ (a_2 - a_3)k_1 - (a_3 - a_1)(a_1 - a_2)(h_1 + h'_1) = 0, \\ (a_3 - a_1)k_2 - (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(h_2 + h'_2) = 0, \\ (a_1 - a_2)k_3 - (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(h_3 + h'_3) = 0. \end{cases}$$

26. Les formules (30) et par suite les conditions (31) peuvent être un peu simplifiées en profitant de l'indétermination relative des hypersphères A_1, A_2, A_3, qui permet d'ajouter (n° **22**) aux expressions ϖ_{ij} les quantités $\alpha_i\omega_j - \alpha_j\omega_i$; on peut alors supposer le choix de A_1, A_2, A_3 fait de manière à avoir

$$h'_1 = h_1, \qquad h'_2 = h_2, \qquad h'_3 = h_3.$$

Les conditions cherchées s'écrivent alors

$$(31') \quad \begin{cases} h = 0, \\ k_1 = 2\,\dfrac{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}{a_2 - a_3}\,h_1, \\ k_2 = 2\,\dfrac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}{a_3 - a_1}\,h_2, \\ k_3 = 2\,\dfrac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}{a_1 - a_2}\,h_3. \end{cases}$$

La condition $h = 0$ s'interprète facilement. On a en effet

$$\omega'_1 = \frac{a_2 - a_3}{(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}\,h[\omega_2\omega_3] + [\theta\omega_1] + h_2[\omega_1\omega_2] - h_3[\omega_1\omega_3];$$

par suite, pour que l'équation $\omega_1 = 0$ soit complètement intégrable, il faut et il suffit que l'on ait $h = 0$. Dire que l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable, c'est dire d'ailleurs que *les lignes de courbure de la deuxième et de la troisième famille s'assemblent en variétés à deux dimensions dépendant d'un paramètre.* C'est une condition nécessaire pour que l'hypersurface admette une représentation conforme sur l'hypersphère; *si elle est réalisée, les lignes de courbure de deux quelconques des trois familles s'assemblent aussi en variétés à deux dimensions dépendant d'un paramètre.*

27. Les conditions (31') sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple. Appelons plan tangent *ombilical* en un point M de l'hypersurface un plan (à deux dimensions) tangent à l'hypersurface et coupant la quadrique indicatrice suivant un cercle. En tout point M il y a six plans tangents ombilicaux, deux réels et quatre imaginaires. *Les équations* (31') *expriment qu'il existe six familles de surfaces* (*à deux dimensions*) *tracées sur l'hypersurface et tangentes en chacun de leurs points à l'un des plans tangents ombilicaux correspondant à ce point.*

Les plans tangents ombilicaux s'obtiennent en effet en exprimant que la forme quadratique

$$a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_3^2 - S(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires en ω_i.

ω_2, ω_3 ; chacun de ces facteurs linéaires, égalé à zéro, donne l'équation de Pfaff de l'une des familles de surfaces cherchées.

Prenons, par exemple, le plan tangent ombilical

$$\sqrt{a_1 - a_2}\,\omega_1 - \sqrt{a_2 - a_3}\,\omega_3 = 0.$$

Si l'on exprime que l'équation précédente est complètement intégrable, on trouve la condition

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_3)k_2 + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)h_2 + \sqrt{a_1 - a_2}\sqrt{a_2 - a_3}\,h = 0.$$

L'intégrabilité complète de l'équation

$$\sqrt{a_1 - a_2}\,\omega_1 + \sqrt{a_2 - a_3}\,\omega_3 = 0$$

conduit de même à la condition

$$\frac{1}{2}(a_1 - a_3)k_2 + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)h_2 - \sqrt{a_1 - a_2}\sqrt{a_2 - a_3}\,h = 0.$$

Ces conditions, comparées aux équations (31′), démontrent le théorème.

Les six plans tangents ombilicaux se distribuent en trois couples de deux, les plans tangents ombilicaux d'un même couple se coupant suivant un axe de la quadrique indicatrice. Il suffit qu'il existe quatre familles de surfaces ombilicales, les quatre plans tangents ombilicaux correspondants appartenant à trois couples différents, pour que les deux autres familles existent.

28. Cherchons en particulier toutes les hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère et telles que l'une des familles réelles de surfaces ombilicales soit formée de sphères. Choisissons le système de référence de manière que la sphère correspondant à un point M de l'hypersurface soit l'intersection de l'hypersphère A et de l'hypersphère A_3, et de plus qu'on ait

$$\omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3 = \omega_3(2\omega_1 + m\omega_3).$$

On aura

$$\psi_1 = \omega_3, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = \omega_1 + m\omega_3.$$

Écrivons que, si l'on fait $\omega_3 = 0$, la sphère $[AA_3]$, intersection des hypersphères A et A_3, reste fixe; nous en déduisons que γ_1

χ_3, ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3. On peut alors choisir A_1 et A_2 de manière à avoir

$$\varpi_{13} = 0, \qquad \varpi_{23} = 0,$$

puis

$$\chi = u\omega_3, \qquad \chi_3 = u_3\omega_3.$$

Les équations des plans tangents ombilicaux sont

$$\omega_3 = 0, \qquad 2\omega_1 + m\omega_3 = 0,$$
$$\omega_3 = S_k(\omega_1 \pm i\omega_2) \qquad (k = 1, 2),$$

où S_1 et S_2 sont les deux racines de l'équation

$$S^2 - mS - 1 = 0.$$

Si nous exprimons que l'équation

$$\omega_3 = S_k(\omega_1 + i\omega_2)$$

est complètement intégrable, nous obtenons

$$[(dS_k - iS_k\varpi_{12})(\omega_1 + i\omega_2)\omega_3] = 0,$$

d'où

$$\frac{dS_k}{S_k} - i\varpi_{12} = (\lambda_k + i\mu_k)(\omega_1 + i\omega_2) + (\rho_k + i\sigma_k)\omega_3.$$

En exprimant $S_1 S_2 = -1$, on obtient

$$\lambda_k = \mu_k = 0, \qquad \varpi_{12} = \sigma\omega_3, \qquad dm = m'\omega_3.$$

Enfin, en exprimant que l'équation

$$2\omega_1 + m\omega_3 = 0$$

est complètement intégrable, on obtient $\sigma = 0$.

Finalement on a

$$\varpi_{12} = \varpi_{13} = \varpi_{23} = 0,$$
$$\psi_1 = \omega_3, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = \omega_1 + m\omega_3,$$
$$\chi = u\omega_3, \qquad \chi_3 = u_3\omega_3.$$

On en déduit, en exprimant $\varpi'_{12} = \varpi'_{13} = \varpi'_{23} = 0$,

$$\chi_1 = \frac{1}{2}\omega_1, \qquad \chi_2 = -\frac{1}{2}\omega_2, \qquad \chi_3 = \frac{1}{2}\omega_3.$$

La condition $\psi'_2 = 0$ donne ensuite

$$\chi = 0,$$

puis on a

$$\theta = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
dA_1 &= -\frac{1}{2}\omega_1 M - \omega_1 N + \omega_3 A,\\
dA_2 &= +\frac{1}{2}\omega_2 M - \omega_2 N,\\
dA_3 &= -\frac{1}{2}\omega_3 M - \omega_3 N + (\omega_1 + m\omega_3) A,\\
dA &= -\omega_3 A_1 - (\omega_1 + m\omega_3) A_3,\\
dN &= \frac{1}{2}\omega_1 A_1 - \frac{1}{2}\omega_2 A_2 + \frac{1}{2}\omega_3 A_3.
\end{aligned}$$

avec

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'_3 = 0.$$

Pour définir les hypersurfaces ainsi obtenues, remarquons d'abord que les deux hypersphères A, A_3 dont l'intersection constitue la sphère ombilicale, font partie d'un réseau linéaire d'hypersphères

$$A, \quad A_3, \quad A_1, \quad \frac{1}{2}M + N,$$

qui est fixe, et qui admet pour base deux points fixes réels $M - 2N \pm 2A_2$. Considérons maintenant les deux hypersphères-points $A \pm iA_3$ qui passent par la sphère ombilicale; l'hypersphère $A + iA_3$ par exemple fait partie d'un faisceau linéaire *fixe* d'hypersphères points

$$A + iA_3, \qquad A_1 + i\left(\frac{1}{2}M + N\right);$$

l'autre hypersphère-point $A - iA_3$ fait partie du faisceau conjugué qui est également fixe.

La sphère, intersection des hypersphères A et A_3, est complètement déterminée par le point imaginaire $A + iA_3$, qui décrit une droite isotrope fixe et l'on peut dire que c'est la sphère réelle *associée* au point imaginaire $A + iA_3$. On obtient ainsi la génération suivante de l'hypersurface :

On considère une droite isotrope sans point réel; les points de cette droite isotrope dépendent de deux paramètres réels. On établit entre ces deux paramètres une relation arbitraire;

l'hypersurface cherchée est engendrée par la sphère réelle variable associée au point imaginaire variable ainsi obtenu.

Si l'on transporte à l'infini l'un des points de base du réseau linéaire d'hypersphères $\left(A, A_3, A_4, \frac{1}{2}M + N\right)$, l'équation de l'hypersurface est de la forme

$$F(x_1x_3 + x_2x_4,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

F étant homogène.

GÉNÉRALITÉS SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DANS L'ESPACE A $n \geqq 5$ DIMENSIONS.

29. Reprenons le problème général de la recherche des hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur une hypersurface donnée (S). Comme nous l'avons déjà vu, ce problème revient à l'intégration du système de Pfaff

$$(32)\quad \begin{cases} \Omega_i = \omega_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \Theta = \theta, \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij} & (i, j = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres de ces équations, en tenant compte de ces équations elles-mêmes, on trouve, d'après (24),

$$(33)\quad \begin{cases} \Omega'_i - \omega'_i \equiv 0, \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1\Psi_1] + [\omega_2\Psi_2] + \ldots + [\omega_{n-1}\Psi_{n-1}], \\ \Theta' - \theta' \equiv -[\omega_1(X_1 - \chi_1)] - [\omega_2(X_2 - \chi_2)] - \ldots - [\omega_{n-1}(X_{n-1} - \chi_{n-1})], \\ \Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv [\omega_j(X_i - \chi_i)] - [\omega_i(X_j - \chi_j)] - [\Psi_i\Psi_j] + [\psi_i\psi_j]. \end{cases}$$

La valeur de Ω'_n conduit à poser

$$(34)\quad \Psi_i = v_{i1}\omega_1 + v_{i2}\omega_2 + \ldots + v_{i,n-1}\omega_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

avec

$$v_{ij} = v_{ji};$$

la valeur de $\Theta' - \theta'$ conduit à poser

$$(35)\quad X_i = \chi_i + u_{i1}\omega_1 + u_{i2}\omega_2 + \ldots + u_{i,n-1}\omega_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

avec

$$u_{ij} = u_{ji};$$

enfin la valeur de $H'_{ij} - \varpi'_{ij}$ conduit, en tenant compte de (25), aux relations suivantes :

$$(36) \qquad \begin{cases} u_{ii} + u_{jj} = v_{ij}^2 - v_{ii}v_{jj} + a_i a_j, \\ u_{ij} \quad = v_{ik}v_{jk} - v_{ij}v_{kk} \qquad (i \neq j \neq k), \\ 0 \quad = v_{ik}v_{jl} - v_{il}v_{jk} \qquad (i \neq j \neq k \neq l). \end{cases}$$

Cela posé, nous avons trois cas à distinguer :

a. Deux au moins des coefficients v_{ij} $(i \neq j)$ sont différents de zéro ;

b. Un seul de ces coefficients est différent de zéro;

c. Tous ces coefficients sont nuls.

30. Dans le cas *a*, on peut supposer que v_{12} et v_{13} par exemple ne sont pas nuls. Si, par exemple, les deux coefficients différents de zéro n'avaient aucun indice commun, comme v_{12} et v_{34}, la formule

$$v_{12}v_{34} = v_{13}v_{24}$$

montre que v_{13} ou v_{24} serait différent de zéro.

Soit donc $v_{12}v_{13} \neq 0$. Les formules

$$v_{1i}v_{2j} = v_{1j}v_{2i} \qquad (i, j = 3, \ldots, n-1)$$

permettent de poser

$$\begin{aligned} v_{1i} &= a v_i, \\ v_{2i} &= b v_i \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

en désignant par a et b deux coefficients dont le rapport seul,

$$\frac{b}{a} = \frac{v_{23}}{v_{13}},$$

est déterminé. On a alors

$$v_{12}v_{ij} = v_{1i}v_{2j} = ab\, v_i v_j;$$

comme le produit ab peut être remplacé par abk^2, on peut choisir k de manière que v_{12} soit égal à $\pm ab$. En posant alors

$a = v_1$, $b = v_2$, on a

$$v_{ij} = \varepsilon v_i v_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

avec

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad v_1 v_2 v_3 \neq 0.$$

Les formules (36) donnent alors

$$u_{ij} = v_i v_j (v_k^2 - \varepsilon v_{kk}),$$

d'où

$$v_i v_j [v_k^2 - \varepsilon v_{kk} - (v_l^2 - \varepsilon v_{ll})] = 0;$$

en faisant successivement $i = 1$, $j = 2$, $l = 3$, puis $i = 1$, $j = 3$, $l = 2$, on voit que les $n-1$ expressions $v_{kk} - \varepsilon v_k^2$ sont toutes égales entre elles. Comme d'autre part on peut choisir l'hypersphère B de manière à augmenter tous les v_{ii} d'une même quantité, on voit qu'on peut poser

$$v_{ii} = \varepsilon v_i^2.$$

Mais alors l'expression

$$\omega_1 \Psi_1 + \omega_2 \Psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \Psi_{n-1}$$

devient un carré parfait, et par suite l'hypersurface (Σ) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre. L'hypersurface (S) admet donc une représentation conforme sur l'hypersphère, cas que nous avons déjà traité.

31. Supposons-nous maintenant dans le cas b où v_{12}, par exemple, est le seul coefficient v_{ij} qui ne soit pas nul. Les formules (36) donnent alors

$$u_{12} = - v_{12} v_{ii} \qquad (i = 3, \ldots, n-1),$$

ce qui montre que les coefficients $v_{33}, v_{44}, \ldots, v_{n-1,n-1}$ sont tous égaux entre eux et par suite, par un choix convenable de l'hypersphère B, peuvent être supposés nuls. Il reste donc les trois coefficients v_{11}, v_{22}, v_{12} qui ne soient pas nécessairement nuls; par suite, la forme quadratique

$$\omega_1 \Psi_1 + \omega_2 \Psi_2 + \ldots + \omega_{n-1} \Psi_{n-1}$$

est réductible à une somme de deux carrés et *l'hypersurface* (Σ) *est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres.*

En continuant à appliquer les formules (36), on trouve

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= 0 \qquad (i \neq j = 1, \ldots, n-1),\\
u_{11} + u_{22} &= v_{12}^2 - v_{11}v_{22} + a_1 a_2,\\
u_{11} + u_{ii} &= \qquad\qquad a_1 a_i,\\
u_{22} + u_{ii} &= \qquad\qquad a_2 a_i,\\
u_{ii} + u_{jj} &= \qquad\qquad a_i a_j.
\end{aligned}$$

Supposons d'abord $a_1 \neq a_2$: la formule

$$u_{11} - u_{22} = (a_1 - a_2) a_i$$

montre que les coefficients $a_3, \ldots, a_{n-1}$ sont égaux entre eux, et par suite peuvent être supposés nuls par un choix convenable de l'hypersphère A ; alors u_{11}, u_{22} et tous les u_{ii} sont nuls et l'on a

$$v_{11}v_{22} - v_{12}^2 = a_1 a_2.$$

L'hypersurface (S) *est elle aussi l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres* et de plus *les caractéristiques des hypersphères sont conservées par la déformation dans l'espace conforme.*

Dans ce cas, la recherche des hypersurfaces (Σ) revient à l'intégration d'un système de Pfaff obtenu en adjoignant aux équations (32) les suivantes :

$$(32') \qquad \begin{cases} \Psi_i = 0 & (i = 3, 4, \ldots, n-1),\\ X_i = \chi_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Avant d'examiner ce nouveau système, plaçons-nous dans le cas laissé de côté où $a_1 = a_2$; on peut supposer $a_1 = a_2 = 0$; par suite,

$$u_{11} = u_{22} = -u_{ii} = \frac{1}{2}(v_{12}^2 - v_{11}v_{22}) = -\frac{1}{2} a_i a_j \qquad (i, j = 3, \ldots, n-1).$$

Si l'un des a_i $(i \geqq 3)$ est nul, ils sont tous nuls, à l'exception d'un au plus ; par suite, l'hypersurface (S) est une hypersphère ou l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant d'un paramètre, cas déjà traité. Si aucun des a_i $(i \geqq 3)$ n'est nul, et si $n \geqq 6$, ces a_i sont tous égaux entre eux ; on peut les supposer nuls, $a_1 a_2$ *n'étant plus nul;* on retombe sur la même conclusion que pour $a_1 \neq a_2$. Si enfin aucun des a_i n'est nul, n étant égal à 5,

l'hypersurface (S) *est, ainsi que l'hypersurface* (Σ), *l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres, mais les caractéristiques de ces hypersphères ne se correspondent pas dans la représentation conforme;* on a

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \psi_3 = a_3\omega_3, \qquad \psi_4 = a_4\omega_4,$$

$$\Psi_1 = v_{11}\omega_1 + v_{12}\omega_2, \qquad \Psi_2 = v_{12}\omega_1 + v_{22}\omega_2, \qquad \Psi_3 = 0, \qquad \Psi_4 = 0,$$

$$X_1 - \chi_1 = -\frac{1}{2}a_3a_4\omega_1, \qquad X_3 - \chi_3 = \frac{1}{2}a_3a_4\omega_3,$$

$$X_2 - \chi_2 = -\frac{1}{2}a_3a_4\omega_2, \qquad X_4 - \chi_4 = \frac{1}{2}a_3a_4\omega_4,$$

$$v_{11}v_{22} - v_{12}^2 = a_3a_4.$$

En résumé, dans le cas b, abstraction faite du cas des hypersurfaces admettant une représentation conforme sur l'hypersphère, chacune des hypersurfaces (S) et (Σ) est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres, les caractéristiques de ces hypersphères se correspondant par la représentation conforme. Exception possible dans le cas $n = 5$, où les caractéristiques peuvent ne pas se correspondre.

32. Supposons enfin qu'on soit dans le cas c, où les v_{ij} $(i \neq j)$ sont tous nuls. Dans ce cas, *les lignes de courbure se correspondent par la représentation conforme;* on a de plus, d'après (36),

$$u_{ij} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$u_{ii} + u_{jj} = a_ia_j - v_{ii}v_{jj}.$$

De là on tire, i, j, k, l étant quatre indices différents quelconques,

$$(v_{ii} - v_{jj})(v_{kk} - v_{ll}) = (a_i - a_j)(a_k - a_l).$$

Cherchons d'abord si à deux coefficients a_i égaux peuvent correspondre deux coefficients v_{ii} distincts; supposons

$$a_1 = a_2, \qquad v_{11} \neq v_{22};$$

on aurait alors

$$v_{33} = v_{44} = \ldots = v_{n-1,\,n-1}$$

et la valeur commune de ces coefficients pourrait être supposée nulle; on peut, d'autre part, supposer $a_1 = a_2 = 0$; on aurait

alors

$$u_{11} = u_{22} = -u_{ii} = -\frac{1}{2} v_{11} v_{22} = -\frac{1}{2} a_i a_j$$

et l'on retomberait sur la discussion faite dans le cas b.

Supposons donc qu'à deux coefficients a_i égaux correspondent deux coefficients v_{ii} égaux. Supposons d'abord que les $n-1$ coefficients a_i ne soient pas tous distincts, que par exemple

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p,$$

$a_{p+1}, \ldots, a_{n-1}$ étant tous différents de a_1; si $p = n-2$, l'hypersurface (S) admet une représentation conforme sur l'hypersphère. Si $p = n-3$, elle est l'enveloppe d'une famille d'hypersphères dépendant de deux paramètres; il en est de même de (Σ) et les caractéristiques des hypersphères se correspondent. Si enfin $p < n-3$, on peut supposer

$$a_1 = \ldots = a_p = 0,$$
$$v_{11} = \ldots = v_{pp} = 0;$$

par suite

$$\begin{aligned} &u_{ii} + u_{jj} = 0, \\ &u_{ii} + u_{\alpha\alpha} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n-1), \\ &u_{jj} + u_{\alpha\alpha} = 0; \end{aligned}$$

donc tous les u_{ii}, $u_{\alpha\alpha}$ sont nuls et

$$v_{\alpha\alpha} v_{\beta\beta} = a_\alpha a_\beta,$$

d'où enfin

$$v_{ii} = \varepsilon a_i \qquad (\varepsilon^2 = 1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Dans ce cas en changeant au besoin B en $-$B, on peut supposer $\varepsilon = 1$; on a donc

$$\Psi_i = \psi_i, \qquad X_i = \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

d'où l'on déduit

$$[\omega_i(X - \chi)] = 0$$

et enfin

$$X = \chi;$$

les deux hypersurfaces (S) et (Σ) *résultent donc l'une de l'autre par une transformation conforme;* ce sont, à notre point de vue, des hypersurfaces identiques.

Reste le cas où les coefficients a_i sont tous distincts, ainsi que les coefficients v_{ii}; les formules

$$(v_{ii}-v_{jj})(v_{kk}-v_{ll})=(a_i-a_j)(a_k-a_l)$$

entraînent comme conséquence que le rapport anharmonique de quatre quelconques des a_i est égal à celui des quatre v_{ii} correspondants; on a donc

$$v_{ii}=\frac{\alpha a_i+\beta}{\gamma a_i+\delta} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\gamma a_i+\delta)(\gamma a_j+\delta)(\gamma a_k+\delta)(\gamma a_l+\delta).$$

Si $n-1>4$, il en résulte que les expressions $\gamma a_i+\delta$ sont toutes égales entre elles, et que par suite γ est nul; on a donc

$$v_{ii}=\alpha a_i+\beta$$

et l'on peut, en choisissant B convenablement, supposer $\beta=0$; on a de plus $\alpha^2=1$, d'où

$$v_{ii}=\varepsilon a_i;$$

on retombe sur la conclusion précédente.

Le dernier cas qui reste à examiner est donc celui où $n=5$, avec

$$v_{ii}=\frac{\alpha a_i+\beta}{\gamma a_i+\delta},$$

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\gamma a_1+\delta)(\gamma a_2+\delta)(\gamma a_3+\delta)(\gamma a_4+\delta) \qquad (\gamma\neq 0).$$

Dans ce cas, que je me réserve d'étudier dans un autre mémoire, la déformation de l'hypersurface (S) se fait avec conservation des lignes de courbure. Il est facile de vérifier que chacune des équations

$$\omega_i=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'*on peut exprimer paramétriquement les coordonnées d'un point de l'hypersurface de manière que les lignes de courbure de chaque famille s'obtiennent en laissant fixes trois des paramètres et en faisant varier le quatrième.*

En dehors des hypersurfaces précédentes, les seules hypersurfaces (S) *qui, dans un espace à* $n\geqq 5$ *dimensions, admettent une représentation conforme sur une hypersurface* (Σ) *qui ne*

résulte pas de (S) par une transformation conforme, sont les hypersphères et les enveloppes d'hypersphères à un ou deux paramètres. Dans ce dernier cas, il y a conservation des caractéristiques, sauf exception possible pour $n = 5$.

LES HYPERSURFACES ENVELOPPES D'HYPERSPHÈRES DÉPENDANT DE DEUX PARAMÈTRES.

33. Soit (S) une hypersurface enveloppe d'hypersphères dépendant de deux paramètres. Nous pouvons choisir pour A l'hypersphère dont (S) est l'enveloppe et supposer en même temps choisies A_1 et A_2 de manière à avoir

$$(37)\qquad \begin{cases} \psi_i = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi = 0. \end{cases}$$

Les expressions ψ_1 et ψ_2 seront des combinaisons linéaires indépendantes de ω_1 et ω_2; c'est tout ce que nous supposons provisoirement. Les équations (37) entraînent comme conséquence, en prenant les covariants bilinéaires,

$$\begin{aligned} &[\varpi_{1i}\psi_1] + [\varpi_{2i}\psi_2] = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &[\chi_1\ \psi_1] + [\chi_2\ \psi_2] = 0, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$(38)\qquad \begin{cases} \varpi_{1i} = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2, \\ \varpi_{2i} = \gamma_i\omega_1 + \delta_i\omega_2 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \chi_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. \end{cases}$$

D'après les résultats du n° 30, la recherche des hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur (S) revient, sauf exception sur laquelle nous reviendrons plus loin, à l'intégration du système

$$(39)\qquad \begin{cases} \Omega_i = \omega_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega_n = 0, \\ \Theta = \theta, \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij} & (i, j = 1, 2, \ldots, n-1), \\ X_i = \chi_i & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi_i = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \end{cases}$$

auquel il faut ajouter l'équation

$$(39') \qquad X = 0,$$

car on a, en tenant compte de (39),

$$X'_1 - \chi'_1 \equiv [\Psi_1 X],$$
$$X'_2 - \chi'_2 \equiv [\Psi_2 X],$$

ce qui montre que, pour toute solution de (39), l'équation (39') est vérifiée.

Pour étudier le système de Pfaff (39), (39'), égalons les covariants bilinéaires des deux membres de ces équations en tenant compte de ces équations elles-mêmes. Nous obtenons

$$(40) \left\{ \begin{array}{lll} \Omega'_i - \omega'_i \equiv 0 & & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Omega'_n \equiv [\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2], & & \\ \Theta' - \theta' \equiv 0, & & \\ \Pi'_{12} - \pi'_{12} \equiv -[\Psi_1 \Psi_2] + [\psi_1 \psi_2], & & \\ \Pi'_{1i} - \varpi'_{1i} \equiv 0 & & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{2i} - \varpi'_{2i} \equiv 0, & & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv 0, & & \\ X'_i - \chi'_i \equiv 0 & & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Psi'_i \equiv -[\varpi_{1i} \Psi_1] - [\varpi_{2i} \Psi_2] & & (i = 3, \ldots, n-1), \\ X' \equiv [\chi_1 \Psi_1] + [\chi_2 \Psi_2]. & & \end{array} \right.$$

Cela posé il y a plusieurs cas à distinguer suivant le nombre de ceux des seconds membres qui sont linéairement indépendants. Les formules (38) montrent que ce nombre est au plus 5, et même 4; car s'il était égal à 5, on devrait avoir, pour toute solution du système,

$$[\omega_1 \Psi_1] = [\omega_2 \Psi_1] = [\omega_1 \Psi_2] = [\omega_2 \Psi_2] = 0,$$

ce qui donnerait

$$\Psi_1 = \Psi_2 = 0,$$

conséquence absurde.

S'il y a quatre seconds membres linéairement indépendants, pour toute solution du système Ψ_1 et Ψ_2 sont des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2 dont les coefficients sont déterminés, au signe près; par suite on a

$$\Psi_1 = \varepsilon \psi_1, \qquad \Psi_2 = \varepsilon \psi_2 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

et, en changeant au besoin le signe de B, on verrait que le déplacement instantané du système de référence a les mêmes composantes relatives pour (S) et (Σ), par suite *les deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme.*

Reste donc à examiner deux cas :

1° Celui où tous les mineurs à deux lignes et deux colonnes du Tableau

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & \delta_{n-1} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix} \right\|$$

sont nuls (hypersurfaces de la première catégorie);

2° Celui où tous les mineurs d'ordre 2 ne sont pas nuls, tous les mineurs d'ordre 3 étant nuls (hypersurfaces de la seconde et de la troisième catégorie).

LES HYPERSURFACES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE.

34. Dans le premier cas on a

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \delta_i, \qquad \beta_i = \gamma_i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &\alpha = \delta, \qquad \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Par un choix convenable de $A_3, \ldots, A_{n-1}$ on peut retrancher de ϖ_{1i} et ϖ_{2i} respectivement $\alpha_i\omega_1$ et $\alpha_i\omega_2$; on aura donc

$$(38') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varpi_{1i} = \varpi_{2i} = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &\chi_1 = \frac{1}{2} k\,\omega_1, \\ &\chi_2 = \frac{1}{2} k\,\omega_2. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on remplace l'hypersphère-point M par λM, ω_i est remplacé par $\lambda\omega_i$ et χ_i par $\frac{1}{\lambda}\chi_i$. Si donc k n'est pas nul, on peut le supposer égal à ± 1, ou du moins à une constante dont le signe est déterminé d'avance; si k est nul, l'hypersphère-point n'est pas complètement déterminée.

De (38′) on déduit, au moyen des formules (24),

$$-\left[\omega_1\left(\chi_i+\frac{k}{2}\omega_i\right)\right]=0,$$

$$-\left[\omega_2\left(\chi_i+\frac{k}{2}\omega_i\right)\right]=0,$$

d'où

$$\chi_i=-\frac{k}{2}\omega_i \qquad (i=3,\ldots,n-1); \tag{41}$$

puis

$$k[\theta\omega_1]=0,$$

$$k[\theta\omega_2]=0,$$

d'où

$$k\theta=0, \tag{42}$$

et enfin, si $k=0$, d'après (24), (38′) et (41),

$$\theta'=0.$$

35. Les hypersurfaces (S) qui satisfont aux conditions précédentes sont faciles à déterminer géométriquement. Supposons d'abord $k\neq 0$ et partons des formules, déduites de (23),

$$\left\{\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1+\omega_2 A_2+\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i A_i,\\
dA &= -\psi_1 A_1-\psi_2 A_2,\\
dA_1 &= -\omega_1\left(N+\frac{k}{2}M\right)+\varpi_{12}A_2+\psi_1 A,\\
dA_2 &= -\omega_2\left(N+\frac{k}{2}M\right)+\varpi_{21}A_1+\psi_2 A,\\
dA_i &= -\omega_i\left(N-\frac{k}{2}M\right)+\sum_{j=3}^{j=n-1}\varpi_{ij}A_j,\\
dN &= \frac{k}{2}(\omega_1 A_1+\omega_2 A_2)-\frac{k}{2}\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i A_i.
\end{aligned}\right. \tag{43}$$

Comparées aux formules (19), elles montrent que

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\sum_{i=3}^{i=n-1}\omega_i^2$$

est le ds^2 de l'hypersurface dans la métrique correspondant à la décomposition de l'espace conforme en deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques, le premier formé de variétés sphériques à trois dimensions considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure k; le second formé de variétés sphériques à $n-3$ dimensions considérées comme des espaces (pseudo-sphériques ou sphériques) de courbure $-k$. De plus chaque variété du second réseau appartient tout entière à l'hypersurface (S), chaque variété du premier réseau ayant en commun avec l'hypersurface une variété à deux dimensions, ou *surface* (s); l'hypersurface (S) est engendrée par les variétés du second réseau (variétés génératrices) qui passent par les différents points de l'une de ces surfaces (s_0). Toutes les surfaces (s), considérées comme situées dans des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) à 3 dimensions, sont par cela même égales entre elles, deux points homologues de deux surfaces (s) et (s') étant sur la même variété sphérique génératrice.

L'hypersurface (Σ) admet une génération analogue avec deux réseaux orthogonaux de variétés sphériques de mêmes courbures k et $-k$, les variétés du premier réseau coupant (Σ) suivant une surface (σ). *Pour l'applicabilité, dans l'espace conforme, de* (S) *et* (Σ), *il faut que les deux surfaces* (s) *et* (σ), *considérées comme des surfaces d'un espace* (*sphérique ou pseudo-sphérique*) *à* 3 *dimensions, soient applicables l'une sur l'autre, et cela suffit.* On aperçoit du reste immédiatement la représentation conforme la plus générale de (S) ou (Σ) : elle dépend de l'application de (s) sur (σ) et en outre d'un groupe à $\frac{(n-3)(n-2)}{2}$ paramètres, celui qui laisse invariantes, dans l'espace conforme de (Σ), les variétés sphériques du second réseau (groupe des déplacements d'un espace pseudo-sphérique ou sphérique à $n-3$ dimensions).

Le ds^2 commun de (S) et de (Σ) est du reste la somme d'un ds^2 arbitraire à 2 variables et d'un ds^2 de courbure $-k$ à $n-3$ variables.

Remarquons enfin qu'on peut choisir les coordonnées $(n+2)$ — sphériques fixes de l'espace conforme, de manière que l'équation de la surface soit de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

le premier membre étant homogène : il suffit pour cela que les équations des variétés sphériques du second réseau soient

$$\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \frac{x_3}{c_3} = \frac{x_4}{c_4}.$$

36. Passons maintenant au cas $k = 0$. On a alors

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} dM &= \theta M + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \sum_{i=3}^{i=n-1} \omega_i A_i, \\ dA &= -\psi_1 A_1 - \psi_2 A_2, \\ dA_1 &= -\omega_1 N + \varpi_{12} A_2 + \psi_1 A, \\ dA_2 &= -\omega_2 N + \varpi_{21} A_1 + \psi_2 A, \\ dA_i &= -\omega_i N + \sum_{j=3}^{j=n-1} \varpi_{ij} A_j, \\ dN &= -\theta N. \end{aligned}\right.$$

Ces formules, comparées aux formules (21), montrent que, au besoin par une inversion, l'hypersurface (S) est susceptible de la génération suivante. On considère deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles, les unes à 3 dimensions, les autres à $n - 3$ dimensions. On prend dans l'une des variétés du premier réseau une surface (s); l'hypersurface (S) est engendrée par les variétés du second réseau qui passent par les différents points de cette surface. L'hypersurface (Σ) admet une génération analogue.

En posant $\theta = \frac{du}{u}$, on a vu que le ds^2 de l'hypersurface (S) dans l'espace euclidien était, *à un facteur constant près*,

$$\frac{1}{u^2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sum_{i=3}^{i=n-1} \omega_i^2\right);$$

il en est de même pour (Σ). Il en résulte que les deux surfaces (s) et (σ), considérées comme des surfaces d'un espace euclidien à trois dimensions, ont des ds^2 différant seulement par un facteur constant; *la surface (σ) est donc applicable sur (s) ou sur une homothétique de (s) : c'est la condition nécessaire et suffisante pour que (Σ) admette une représentation conforme sur* (S).

On peut choisir les coordonnées rectangulaires de l'espace

euclidien à n dimensions de manière que l'équation de (S) soit de la forme

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

et le ds^2 de (S) est la somme d'un ds^2 arbitraire à deux variables et d'un ds^2 de courbure nulle à $n - 3$ variables.

LES HYPERSURFACES DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

37. Arrivons maintenant au cas où les mineurs du deuxième degré de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_3 - \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \alpha_{n-1} - \delta_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ \alpha - \delta & \beta & \gamma \end{matrix} \right\|$$

sont tous nuls. Cela revient à dire que les équations homogènes et du second degré

$$(45) \qquad \begin{cases} \omega_1 \varpi_{2i} - \omega_2 \varpi_{1i} = 0 & (i = 3, \ldots, n-1), \\ \omega_1 \chi_2 - \omega_2 \chi_1 = 0 \end{cases}$$

se réduisent à une seule, sans être toutes des identités. Nous allons supposer d'abord que le premier membre de cette équation unique est un carré parfait que nous pouvons supposer ω_1^2. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} &\beta_i = 0, \qquad \delta_i = \alpha_i \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ &\beta = 0, \qquad \delta = \alpha. \end{aligned}$$

Comme dans le premier cas on peut choisir $A_3, \ldots, A_{n-1}$ de manière à annuler tous les coefficients α_i. Il restera donc

$$(46) \qquad \begin{cases} \varpi_{1i} = 0, & \varpi_{2i} = \gamma_i \omega_1 \qquad (i = 3, \ldots, n-1), \\ \chi_1 = \alpha \omega_1, & \chi_2 = \gamma \omega_1 + \alpha \omega_2. \end{cases}$$

Les formules (40) montrent qu'on a alors

$$\begin{aligned} &[\omega_1 \Psi_1] + [\omega_2 \Psi_2] = 0, \\ &[\omega_1 \Psi_2] \qquad\qquad = 0, \\ &[\Psi_1 \Psi_2] - [\psi_1 \psi_2] = 0, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\Psi_1 = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,$$
$$\Psi_2 = \mu\omega_1,$$
$$[\psi_1\psi_2] = -\mu^2[\omega_1\omega_2];$$

le coefficient μ est donc un invariant, c'est-à-dire a la même valeur pour (S) et pour (Σ); autrement dit on peut ajouter aux équations (39) et (39′) la nouvelle équation

$$(39'') \qquad \Psi_2 = \psi_2.$$

Si l'on calcule les covariants bilinéaires des deux membres des équations (39), (39′) et (39″) en tenant compte de ces équations elles-mêmes et si l'on néglige d'écrire les résultats quand ils sont identiques, on obtient

$$(40') \qquad \begin{cases} \Omega'_n & \equiv [\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Pi'_{12} - \varpi'_{12} & \equiv [\psi_2(\Psi_1 - \psi_1)], \\ X' & \equiv \alpha[\omega_1(\Psi_1 - \psi_1)], \\ \Psi'_2 - \psi'_2 & \equiv -[\varpi_{12}(\Psi_1 - \psi_1)]. \end{cases}$$

Or prenons les covariants bilinéaires des deux membres des premières équations (46), nous trouvons

$$[(\alpha\omega_i + \chi_i + \gamma_i\varpi_{12})\omega_1] = 0,$$
$$[(\alpha\omega_i + \chi_i - \gamma_i\varpi_{12})\omega_2] + \left[\left(\gamma\omega_i - \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} \gamma_\rho\varpi_{\rho i} - \gamma_i\theta - d\gamma_i\right)\omega_1\right] = 0;$$

cette dernière équation montre que les γ_i ne peuvent pas être tous nuls, sans quoi γ serait nul aussi, contrairement à l'hypothèse; les deux équations montrent ensuite que $\alpha\omega_i + \chi_i$ et $\gamma_i\varpi_{12}$ ne dépendent que de ω_1 et ω_2. L'expression ϖ_{12} ne dépend donc que de ω_1 et ω_2 :

$$(47) \qquad \varpi_{12} = h\omega_1 + k\omega_2.$$

Si k n'est pas nul, les formules (40′) montrent qu'on doit avoir

$$\Psi_1 - \psi_1 = 0;$$

par suite l'hypersufacc (Σ) résulte de (S) par une simple transformation conforme.

Considérons donc le cas $k = 0$. S'il en est ainsi les formules (40′)

montrent qu'il existe une infinité d'hypersurfaces (Σ) admettant une représentation conforme sur (S) sans en résulter par une transformation conforme, et que ces hypersurfaces dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

38. Il est facile de caractériser ces hypersurfaces (S), que nous appellerons *hypersurfaces de la seconde catégorie*. Remarquons d'abord en effet que l'équation $\omega_1 = 0$ est complètement intégrable, car on a, d'après (24), (46), (47) et l'hypothèse $k = 0$,

$$\omega'_1 = [\theta\omega_1] + h[\omega_1\omega_2].$$

Cette équation définit donc sur (S) une famille de variétés à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre. Il est facile de voir que *ces variétés sont sphériques*. En effet quand on se déplace sur une de ces variétés, c'est-à-dire quand on fait $\omega_1 = 0$, on a

$$dA = -\psi_1 A_1,$$
$$dA_1 = \psi_1 A;$$

la variété sphérique, intersection de A_1 et A, reste donc fixe.

Réciproquement, *si une hypersurface* (S) *est le lieu d'une variété sphérique à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre, elle est de la seconde catégorie*. En effet toute hypersphère contenant cette variété est tangente. Si on la choisit pour hypersphère A, cette hypersphère ne dépend que de deux paramètres. Si alors on choisit pour A_1 l'hypersphère orthogonale à A contenant la variété, il faut que l'intersection de A_1 et A ne dépende que d'un paramètre. Or

$$d[A_1A] = -\chi_1[MA] - \omega_1[NA] + \sum_{\rho=2}^{\rho=n-1} \varpi_{1\rho}[A_\rho A] + \chi[MA_1] - \psi_2[A_1A_2];$$

il faut donc que toutes les expressions ω_1, χ_1, $\varpi_{1\rho}$, χ, ψ_2 ne dépendent linéairement que d'une seule d'entre elles :

$$\chi_1 = \alpha\omega_1,$$
$$\varpi_{1i} = \alpha_i\omega_1,$$
$$\psi_2 = \mu\omega_1,$$
$$\chi = a\omega_1.$$

On peut déjà supposer a nul en choisissant convenablement A_2,

puis $\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ nuls en choisissant convenablement $A_3, \ldots, A_{n-1}$. Les formules

$$[\omega_1 \psi_1] + [\omega_2 \psi_2] = 0,$$
$$[\varpi_{1i} \psi_1] + [\varpi_{2i} \psi_2] = 0,$$
$$[\chi_1 \psi_1] + [\chi_2 \psi_2] = 0$$

conduisent alors facilement aux équations (46); comme on a d'autre part $\varpi_{12} = \alpha_2 \omega_1$, le théorème est démontré.

Les hypersurfaces lieux d'une variété sphérique à $n-2$ dimensions dépendant d'un paramètre admettent donc dans l'espace conforme une déformation dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument; les variétés sphériques génératrices se conservent dans la déformation.

Chaque variété génératrice $[A_1 A]$ a comme caractéristique une variété à $n-4$ dimensions, formée des points qui lui sont communs à A_2 et $N + \alpha M$; cette caractéristique est une variété sphérique. Les choses se passent de la même manière pour (Σ), les caractéristiques des variétés génératrices se correspondant dans la représentation conforme.

On peut ajouter que les composantes du déplacement instantané du système de référence de (Σ) sont connues sans intégration; la seule inconnue est en effet Ψ_1; or $\Psi_1 - \psi_1$ est de la forme $\lambda\omega_1$, c'est-à-dire $f(t)\,dt$, en désignant par t le paramètre dont dépend la variété génératrice et par $f(t)$ une fonction *arbitraire* de t.

Au contraire il est impossible d'avoir sans signe d'intégration l'équation générale de (Σ), lorsqu'on se donne l'équation de (S).

LES HYPERSURFACES DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

39. Arrivons enfin au cas où les équations (45) se réduisent à une seule, dont le premier membre ne soit pas un carré parfait. Ce cas est celui où il existe deux familles de variétés sphériques $[A_1 A_2 A]$ admettant une enveloppe, ou d'une manière plus précise jouissant de la propriété que chaque variété de la famille ait avec la variété infiniment voisine une variété commune à $n-4$ dimensions.

Si, en effet, on exprime que l'hypersphère-point

$$x_{n+1} M + x_3 A_3 + \ldots + x_{n-1} A_{n-1} + x_{n+2} N$$

appartient aux hypersphères dA_1, dA_2, dA, on obtient

$$-\omega_1 x_{n+1} - \chi_1 x_{n+2} + \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} \varpi_{1\rho} x_\rho = 0,$$

$$-\omega_2 x_{n+1} - \chi_2 x_{n+2} + \sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} \varpi_{2\rho} x_\rho = 0;$$

pour que ces équations en x_i se réduisent à une seule il faut que les équations (45) se réduisent à une, et cette équation unique donne les valeurs qu'il faut attribuer au rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ pour que la propriété énoncée ait lieu.

Supposons alors qu'on ait choisi les paramètres u et v, dont dépend l'hypersphère A, de manière que les deux familles considérées soient $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ Il est facile de voir que l'hypersphère A satisfera à une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A = 0. \tag{48}$$

On peut du reste le vérifier par le calcul.

Soit en effet

$$(\omega_2 - p\omega_1)(\omega_2 - q\omega_1) = 0$$

l'équation qui admet pour intégrales $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$; on peut poser

$$\begin{cases} \omega_1 = a\, du + b\, dv, \\ \omega_2 = pa\, du + qb\, dv, \end{cases} \tag{49}$$

puis

$$\begin{cases} \varpi_{1i} = a_i\, du + b_i\, dv, \\ \varpi_{2i} = p a_i\, du + q b_i\, dv, \\ \chi_1 = a'\, du + b'\, dv, \\ \chi_2 = pa'\, du + qb'\, dv. \end{cases} \tag{50}$$

On a enfin

$$\begin{cases} \psi_1 = -qm\, du - pn\, dv, \\ \psi_2 = m\, du + n\, dv. \end{cases} \tag{51}$$

Ajoutons qu'on peut toujours choisir l'hypersphère A_1 de manière qu'elle ne dépende que de u et de v; il en sera de même évidemment de A_2; les coefficients de $du.\, dv$ dans ψ_1 et ψ_2 ne dépendront alors que de u, v; les quantités m, n, p, q sont donc des fonctions de u et v seulement; de plus les expressions de Pfaff qui se pré-

sentent dans les expressions de dA_1 et de dA_2 sont des combinaisons linéaires de du et de dv.

Cela posé on a, d'après (23), (49), (50), (51),

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u} = -m(A_2 - qA_1), \\ \dfrac{\partial A}{\partial v} = -n(A_2 - pA_1); \end{cases}$$

d'autre part les formules

$$(53)\qquad \begin{cases} dA_1 = -(a'\,du + b'\,dv)M - (a\,du + b\,dv)N + \varpi_{12}A_2 \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\rho=3}^{\rho=n-1} (a_\rho\,du + b_\rho\,dv)A_\rho - (qm\,du + pn\,dv)A, \\ dA_2 = -(pa'\,du + qb'\,dv)M - (pa\,du + qb\,dv)N - \varpi_{12}A_1 \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\rho=3}^{e=n-1} (pa_\rho\,du + qb_\rho\,dv)A_\rho + (m\,du + n\,dv)A, \end{cases}$$

montrent que

$$\frac{\partial A_2}{\partial v} - q\frac{\partial A_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial u} - p\frac{\partial A_1}{\partial u}$$

ne dépendent que de A_1, A_2, A, ou encore que $\dfrac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial v}$ est linéaire en $\dfrac{\partial A}{\partial u}$, $\dfrac{\partial A}{\partial v}$, A.

La réciproque est du reste évidente.

Posons maintenant

$$(54)\qquad \varpi_{12} = h\,du + k\,dv;$$

on a, en différentiant les équations (52) et tenant compte de l'équation (48),

$$(55)\qquad \begin{cases} \gamma - mn(1 + pq) = 0, \\ \dfrac{\partial m}{\partial v} - mkq + m\alpha + n\beta = 0 \\ \dfrac{\partial(mq)}{\partial v} + mk + mq\alpha + np\beta = 0, \\ \dfrac{\partial n}{\partial u} - nhp + m\alpha + n\beta = 0, \\ \dfrac{\partial(np)}{\partial u} + nh + mq\alpha + np\beta = 0, \end{cases}$$

et ces équations déterminent α, β, γ.

40. Quand on passe de (S) à (Σ) les coefficients a, b, a_i, b_i, a', b', p, q restent les mêmes; les coefficients m, n sont remplacés par μ, ν et la formule

$$[\Psi_1 \Psi_2] = [\psi_1 \psi_2]$$

devient

$$\mu\nu = mn;$$

on peut donc poser

$$\mu = tm, \qquad \nu = \frac{1}{t} n$$

ou encore

$$(39'') \qquad \begin{cases} \Psi_1 = -qtm\,du - p\dfrac{n}{t}\,dv, \\ \Psi_2 = \quad tm\,du + \dfrac{1}{t} n\,dv, \end{cases}$$

et les seconds membres des équations (40) deviennent alors identiquement nuls. Les hypersurfaces (Σ) s'obtiennent donc en somme par l'intégration des équations (39), (39′), (39″), où t est une fonction inconnue nouvelle de u, v.

Si maintenant on prend les covariants bilinéaires des équations (39), (39′), (39″), en tenant compte de ces équations elles-mêmes, les covariants des deux membres de chaque équation (39), (39′) sont égaux d'eux-mêmes; en égalant ceux des deux membres des équations (39″), on obtient les valeur de $\frac{\partial t}{\partial u}$ et $\frac{\partial t}{\partial v}$.

Le calcul donne

$$\left[\frac{\partial(mq)}{\partial v} + mk\right] t - \left[\frac{\partial(np)}{\partial u} + nh\right] \frac{1}{t} + mq\frac{\partial t}{\partial v} + np\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial m}{\partial u} - mkq\right] t - \left[\frac{\partial n}{\partial u} - nhp\right] \frac{1}{t} + m\frac{\partial t}{\partial v} + n\frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = 0.$$

Ces équations, comparées aux équations (55), donnent

$$(56) \qquad \frac{\partial t}{\partial v} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\alpha, \qquad \frac{1}{t^2}\frac{\partial t}{\partial u} = \left(t - \frac{1}{t}\right)\beta,$$

ou encore, en posant $t^2 = \theta$,

$$(57) \qquad \frac{1}{2}\frac{d\theta}{\theta - 1} = \theta\beta\,du + \alpha\,dv.$$

41. Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter :

1° Cette équation aux différentielles totales (57) n'admet pas

d'autre solution que $\theta = 1$; alors l'hypersurface (Σ) résulte de (S) par une transformation conforme; autrement dit l'hypersurface (S) est *indéformable* dans l'espace conforme;

2° Cette équation admet une solution et une seule différente de $\theta = 1$; il existe *une* hypersurface (Σ) sur laquelle (S) admet une représentation conforme, sans résulter de (S) par une transformation conforme;

3° Cette équation est complètement intégrable. Alors (S) admet une déformation *continue* dans l'espace conforme, et cette déformation dépend d'un paramètre. L'hypersurface (S) sera dite appartenir à la *troisième catégorie.*

La condition pour qu'il en soit ainsi est donnée immédiatement par les équations

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = -2\alpha\beta. \tag{58}$$

Les hypersurfaces (S) *de la troisième catégorie s'obtiennent donc en prenant l'enveloppe d'une hypersphère unité* A *à deux paramètres satisfaisant à une équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u\, \partial v} + \alpha \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A = 0,$$

où les coefficients α *et* β *satisfont aux relations*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = -2\alpha\beta.$$

On trouve immédiatement

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{V'}{U - V}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\frac{U'}{U - V},$$

où U est une fonction de la variable u seule et V une fonction de la variable v seule.

Si l'on considère maintenant l'hypersphère

$$K = \sqrt{U - V}\, A,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u\, \partial v} + \left\{ \gamma - \frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U - V)^2} \right\} K = 0.$$

On peut donc encore dire que *l'hypersurface* (S) *la plus générale de la troisième catégorie est l'enveloppe d'une hypersphère dépendant de deux paramètres* u, v, *les coordonnées* $(n+2)$ — *sphériques* $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ *de cette hypersphère satisfaisant à une même équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} + \gamma' f = 0$$

et l'expression

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1} x_{n+2}$$

étant en même temps la différence entre une fonction U *de* u *et une fonction* V *de* v.

Comme dans le problème de la déformation des hypersurfaces dans un espace euclidien, on démontre que *l'hypersurface déformée* (Σ) *est donnée d'une manière analogue, l'équation de Laplace étant la même, mais les fonctions* U *et* V *subissant une même transformation homographique à coefficients constants.*

42. Un cas particulier intéressant est celui où les équations (45) se réduisent à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0.$$

Dans ce cas $p = i$, $q = -i$; les hypersphères $\frac{\partial A}{\partial u}$ et $\frac{\partial A}{\partial v}$ sont des hypersphères-points; l'équation

$$\frac{\partial A}{\partial u} \Big| \frac{\partial A}{\partial u} = 0$$

conduit alors, en dérivant par rapport à v, à

$$\frac{\partial A}{\partial u} \Big| \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} + \gamma A \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta \frac{\partial A}{\partial u} \Big| \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

et comme les hypersphères $\frac{\partial A}{\partial u}$, $\frac{\partial A}{\partial v}$ ne peuvent pas être orthogonales, on a

$$\beta = 0$$

et de même

$$\alpha = 0;$$

par suite, les conditions (58) sont vérifiées et l'hypersphère (S) est certainement de la troisième catégorie.

Un autre cas particulier intéressant est celui où l'équation (48) se réduit à

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

SUR CERTAINES HYPERSURFACES DE L'ESPACE A CINQ DIMENSIONS ENVELOPPES D'HYPERSPHÈRES A DEUX PARAMÈTRES.

43. Arrivons maintenant au cas exceptionnel signalé n° 30 où les hypersurfaces (S) et (Σ) dans l'espace à cinq dimensions sont chacune enveloppe d'hypersphères à deux paramètres sans que les caractéristiques se correspondent dans la représentation conforme.

L'hypersurface (S) satisfait aux équations

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \tag{59}$$

et l'on peut choisir les hypersphères A_3 et A_4 de manière à avoir en outre

$$\chi = 0. \tag{60}$$

Les expressions de ψ'_1 et ψ'_2 donnent alors les relations

$$[\varpi_{13}\psi_3] + [\varpi_{14}\psi_4] = 0,$$
$$[\varpi_{23}\psi_3] + [\varpi_{24}\psi_4] = 0,$$

qui montrent que ϖ_{13}, ϖ_{14}, ϖ_{23}, ϖ_{24} ne dépendent que de ψ_3 et de ψ_4, c'est-à-dire de ω_3 et ω_4.

D'autre part, les équations

$$\Psi_3 = 0, \qquad \Psi_4 = 0, \tag{61}$$

auxquelles satisfait l'hypersurface (Σ), conduisent à

$$\left\{\begin{aligned} &-[\omega_3 X] + [\Psi_1 \varpi_{13}] + [\Psi_2 \varpi_{23}] = 0,\\ &-[\omega_4 X] + [\Psi_1 \varpi_{14}] + [\Psi_2 \varpi_{24}] = 0,\end{aligned}\right. \tag{62}$$

et ces relations montrent que ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3,

Ψ_1, Ψ_2, c'est-à-dire de ω_3, ω_1, ω_2; par suite ϖ_{13} et ϖ_{23} ne dépendent que de ω_3. Or on peut choisir les hypersphères A_1 et A_2 de manière que les coefficients de ω_3 dans ϖ_{13} et ϖ_{23} soient nuls : on peut donc supposer

$$\varpi_{13} = \varpi_{23} = 0. \tag{63}$$

Les équations (62) montrent alors d'une part que X ne peut dépendre que de ω_3, d'autre part que X ne peut dépendre que de ω_4, ω_1, ω_2. On a donc

$$X = 0; \tag{64}$$

on voit enfin que ϖ_{14} et ϖ_{24} sont nuls aussi :

$$\varpi_{14} = \varpi_{24} = 0. \tag{65}$$

Si l'on exprime que les covariants bilinéaires de ϖ_{13}, ϖ_{23}, ϖ_{14}, ϖ_{24} sont nuls, on obtient :

$$\begin{aligned}
&[\omega_3 \chi_1] - [\omega_1 \chi_3] = 0, && [\omega_3 X_1] - [\omega_1 X_3] = 0,\\
&[\omega_3 \chi_2] - [\omega_2 \chi_3] = 0, && [\omega_3 X_2] - [\omega_2 X_3] = 0,\\
&[\omega_4 \chi_1] - [\omega_1 \chi_4] = 0, && [\omega_4 X_1] - [\omega_1 X_4] = 0,\\
&[\omega_4 \chi_2] - [\omega_2 \chi_4] = 0, && [\omega_4 X_2] - [\omega_2 X_4] = 0,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne des relations de la forme

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{2} m \omega_1,\\
\chi_2 &= \frac{1}{2} m \omega_2,\\
\chi_3 &= -\frac{1}{2} m \omega_3,\\
\chi_4 &= -\frac{1}{2} m \omega_4,
\end{aligned}\right. \qquad (67)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{2} \mu \omega_1,\\
X_2 &= \frac{1}{2} \mu \omega_2,\\
X_3 &= -\frac{1}{2} \mu \omega_3,\\
X_4 &= -\frac{1}{2} \mu \omega_4.
\end{aligned}\right.$$

Enfin en exprimant que $\Pi'_{12} - \varpi'_{12}$, $\Pi'_{34} - \varpi'_{34}$ sont nuls, on obtient les relations

$$[\Psi_1 \Psi_2] = (m - \mu)[\omega_1 \omega_2], \tag{68}$$

$$[\psi_3 \psi_4] = (m - \mu)[\omega_3 \omega_4]; \tag{69}$$

et, en égalant les covariants bilinéaires des deux membres des

équations (66) et (67), on arrive aux équations

$$dm + 2m\theta = 0, \tag{70}$$

$$d\mu + 2\mu\theta = 0. \tag{71}$$

La formule (69) montre que $m - \mu$ n'est pas nul; d'autre part, si l'on change l'hypersphère M en λM, ce coefficient $m - \mu$ est divisé par λ^2; on peut donc le supposer égal à une constante positive ou négative; on voit alors, d'après (70) et (71), que l'on a

$$\theta = 0,$$

d'où

$$dm = d\mu = 0;$$

les coefficients m et μ sont donc des constantes distinctes, dont l'une au plus peut être nulle.

44. Cela posé il est facile de voir la nature géométrique de l'hypersurface (S). On a en effet

$$\left\{\begin{aligned}
dM &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 + \omega_4 A_4,\\
dA_1 &= -\omega_1\left(N + \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{12} A_2,\\
dA_2 &= -\omega_2\left(N + \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{21} A_1,\\
dA_3 &= -\omega_3\left(N - \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{34} A_4 + \psi_3 A,\\
dA_4 &= -\omega_4\left(N - \frac{m}{2}M\right) + \varpi_{43} A_3 + \psi_4 A,\\
dA &= -\psi_3 A_3 - \psi_4 A_4,\\
dN &= \frac{1}{2}m(\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2) - \frac{1}{2}m(\omega_3 A_3 + \omega_4 A_4).
\end{aligned}\right. \tag{72}$$

Ces formules, comparées aux formules (19), montrent que (S) est une hypersurface de la première catégorie. On considère un premier réseau de variétés sphériques à trois dimensions $[A_1 A_2]$ et un réseau orthogonal de variétés sphériques (sphères) à deux dimensions $[A_3 A_4 A]$; les premières peuvent être considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure $-m$, les autres comme des espaces (pseudo-sphériques ou sphériques) de courbure $+m$. On considère alors dans une des variétés à trois dimensions du premier réseau (ici la variété

$[A_1 A_2]$) une surface à deux dimensions (s) par chaque point de laquelle on fait passer la sphère du second réseau qui contient ce point.

Ici la surface (s) n'est pas une surface arbitraire; son ds^2, dans l'espace à trois dimensions de courbure $-m$ dans lequel elle est placée, est

$$\omega_3^2 + \omega_4^2.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\omega'_3 &= [\omega_4 \varpi_{43}], \\
\omega'_4 &= [\omega_3 \varpi_{34}], \\
\varpi'_{34} &= m[\omega_3 \omega_4] - [\psi_3 \psi_4] = \mu[\omega_3 \omega_4];
\end{aligned}$$

par suite (n° 14) la courbure (absolue) [1] de ce ds^2 est $-\mu$, c'est-à-dire *constante*.

Quant à l'hypersurface (Σ), les formules

$$(73)\quad \left\{
\begin{aligned}
dP &= \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3 + \omega_4 B_4, \\
dB_1 &= -\omega_1 \left(Q + \frac{\mu}{2} P\right) + \varpi_{12} B_2 + \Psi_1 B, \\
dB_2 &= -\omega_2 \left(Q + \frac{\mu}{2} P\right) + \varpi_{21} B_1 + \Psi_2 B, \\
dB &= -\Psi_1 B_1 - \Psi_2 B_2, \\
dB_3 &= -\omega_3 \left(Q - \frac{\mu}{2} P\right) + \varpi_{34} B_4, \\
dB_4 &= -\omega_4 \left(Q - \frac{\mu}{2} P\right) + \varpi_{43} B_3,
\end{aligned}
\right.$$

montrent qu'elle est susceptible d'une génération analogue. On considère un premier réseau de variétés sphériques à deux dimensions $[B_1 B_2 B]$ et un réseau orthogonal de variétés sphériques à trois dimensions $[B_3 B_4]$; les premières peuvent être considérées comme des espaces (sphériques ou pseudo-sphériques) de courbure $-\mu$, les autres comme des espaces de courbure $+\mu$. On considère alors, dans une des variétés à trois dimensions du second réseau, la variété $[B_3 B_4]$, une surface à deux dimensions (σ) par chaque point de laquelle on fait passer la sphère du premier réseau qui contient ce point.

Ici la surface (σ) n'est pas arbitraire, son ds^2, dans l'espace

---

[1] La courbure *relative* (produit des deux rayons de courbure principaux) serait $m - \mu$.

à trois dimensions de courbure $+\mu$ dans lequel elle est placée, est

$$\omega_1^2 + \omega_2^2.$$

Or on a

$$\omega'_1 = [\omega_2 \varpi_{21}],$$
$$\omega'_2 = [\omega_1 \varpi_{12}],$$
$$\varpi'_{12} = m[\omega_1 \omega_2];$$

par suite (n° 14) la courbure [absolue (¹)] de ce ds^2 est $+m$, c'est-à-dire une constante.

Réciproquement il est facile de voir que deux hypersurfaces (S) *et* (Σ), *engendrées comme il vient d'être dit, sont applicables l'une sur l'autre dans l'espace conforme*, car pour chacunes d'elles le ds^2 est la somme d'un ds^2 à deux variables de courbure m et d'un ds^2 à deux variables de courbure $-\mu$. Dans la représentation conforme des deux hypersurfaces l'une sur l'autre, *les sphères génératrices de* (S) *correspondent aux surfaces* (σ) *de* (Σ) *et les surfaces* (s) *de* (S) *aux sphères génératrices de* (Σ).

Dans le cas particulier où m par exemple serait nul, l'hypersurface (S) pourrait, par une inversion, être engendrée au moyen de deux réseaux orthogonaux de variétés planes parallèles, le premier formé de plans à deux dimensions, le second formé d'hyperplans à trois dimensions, dont chacun coupe (S) suivant une surface de courbure totale constante $-\mu$.

SUR L'ABSCISSE DE CONVERGENCE DES SÉRIES DE DIRICHLET;

Par M. Émile Cotton.

Les séries de la forme

$$(1) \qquad a_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 e^{-\lambda_2 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \ldots,$$

où les a sont des nombres quelconques, les λ des nombres réels

(¹) La courbure *relative* serait, ici aussi, égale à $m - \mu$.

positifs croissants avec l'indice n, et où z désigne une variable complexe, sont appelées *séries de Lejeune-Dirichlet*. Elles ont fait l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels nous citerons la Thèse de M. Cahen [1]. Si une telle série est convergente pour une valeur z_0 de la variable, elle l'est encore pour toute valeur de z dont la partie réelle $R(z)$ surpasse celle $R(z_0)$ de z_0. De là résulte l'existence d'une *abscisse de convergence*, finie ou non, pour une série (1); soit α cette abscisse, (1) est convergente pour $R(z) > \alpha$, divergente pour $R(z) < \alpha$, le cas où $R(z) = \alpha$ étant réservé.

M. Cahen, dans le Travail cité plus haut, a démontré que, *si cette abscisse est positive*, son expression est

$$(2) \qquad \alpha = \overline{\lim_{n=+\infty}} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \right\},$$

où $\overline{\lim\limits_{n=+\infty}}\, s_n$ désigne, comme d'habitude, la plus grande des limites de la suite s_n pour n infini positif.

Je me propose de compléter cette proposition en établissant que, *si l'abscisse de convergence est négative*, on a de même

$$(3) \qquad \alpha = \lim_{n=+\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log |a_n + a_{n+1} + \ldots| \right\},$$

expression analogue à la précédente, mais où les restes de la série remplacent les sommes des premiers termes.

L'étude des intégrales

$$f(z) = \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t) e^{-tz}\, dt,$$

où la variable t est réelle, la fonction $\varphi(t)$ et la variable z pouvant être complexes, présente avec celle des séries (1) une analogie manifeste.

M. Pincherle a montré l'existence pour ces intégrales d'une abscisse de convergence α; M. Landau a donné une expression de α analogue à celle de M. Cahen, lorsque $\alpha > 0$; enfin M. Pincherle a traité le cas de $\alpha < 0$ dans un Mémoire [2] qui m'a con-

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XI, 1894, p. 75.
[2] *Acta mathematica*, t. XXXVI, p. 269.

duit à la proposition qui vient d'être énoncée et dont voici la démonstration.

1. L'identité appelée *transformation d'Abel*, qui est, dans la théorie des différences et des sommes définies, l'analogue de la formule d'intégration par parties, intervient fréquemment dans l'étude des séries (1). Pour la démonstration qui va suivre, il nous sera commode de la présenter de la façon suivante :

Soient deux suites indéfinies

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots, \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots :$$

en supposant la série Σv_n convergente, désignons par R_n le reste

$$R_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots ;$$

nous avons $R_{n-1} - R_n = v_n$, et, par suite,

$$u_n v_n = u_n(R_{n-1} - R_n) = u_n R_{n-1} - u_{n+1} R_n + R_n(u_{n+1} - u_n)$$

ou, avec la notation habituelle des différences,

$$(4) \qquad u_n v_n = R_n \Delta u_n - \Delta(u_n R_{n-1}).$$

Cette identité nous montre que, *si les séries* Σv_n, $\Sigma(R_n \Delta u_n)$ *sont convergentes, et si de plus* $u_n R_{n-1}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *la série* $\Sigma u_n v_n$ *est aussi convergente.*

2. L'abscisse de convergence de la série (1) étant supposée négative, cette série est convergente pour $z = 0$. Elle se réduit alors à Σa_n, nous prendrons $v_n = a_n$, d'où

$$R_n = a_{n+1} - a_{n+2} - \ldots .$$

Comme $|R_n|$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, $\log|R_n|$ est négatif pour les grandes valeurs de n, et la plus grande des limites pour n infini de $\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n}$ ne peut surpasser zéro. Admettons qu'elle soit négative et désignons-la par $-\beta$. Soit ε un nombre positif inférieur à β, on peut trouver un nombre ν tel que l'inégalité $n > \nu$ entraîne

$$\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n} < -\beta + \varepsilon,$$

ou encore

$$(5) \qquad |R_{n-1}| < e^{-\lambda_n(\beta-\varepsilon)}.$$

Il nous suffit d'étudier la série (1) sur l'axe réel; désignons alors par x la variable. et montrons que la série

$$(6) \qquad \Sigma a_n e^{-\lambda_n x}$$

est convergente pour

$$(7) \qquad x > -\beta - \varepsilon.$$

Appliquons pour cela la proposition du n° 1. Nous avons pris déjà $v_n = a_n$, nous ferons $u_n = e^{-\lambda_n x}$.

Les inégalités (5) et (7) montrent que

$$|u_n R_{n+1}| < e^{-\lambda_n x + \beta - \varepsilon}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Pour établir la convergence de $\Sigma R_n \Delta u_n$, écrivons

$$R_n \Delta u_n = R_n(e^{-\lambda_{n+1}x} - e^{-\lambda_n x}) = R_n e^{-\lambda_{n+1}x}[1 - e^{\lambda_{n+1}-\lambda_n x}].$$

Or $1 - e^{-t}$ est, pour $t > 0$, inférieur à t; ceci montre que

$$|R_n \Delta u_n| < |R_n| e^{-\lambda_{n+1}x} |x| (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

et, à cause de (5),

$$|R_n \Delta u_n| < e^{-\lambda_{n+1}(x+\beta-\varepsilon)} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) |x|.$$

M. Cahen a démontré (*loc. cit.*, p. 91) que la série de terme général

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{-\lambda_{n+1}u}$$

est convergente pour $u > 0$. La convergence de la série (6) étant assurée dès que l'inégalité (7) est vérifiée, on a $\alpha \leqq -\beta + \varepsilon$, et, puisque ε est arbitrairement petit,

$$(8) \qquad \alpha \leqq -\beta.$$

3. Supposons maintenant la série (6) convergente pour une valeur négative de x, et posons

$$r_n = a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1}x} + a_{n+2} e^{-\lambda_{n+2}x} + \ldots,$$

d'où

$$a_n = (r_{n-1} - r_n)e^{\lambda_n x}$$

et par suite

$$R_{n-1} = r_{n-1}e^{\lambda_n x} + r_n(e^{\lambda_{n+1}x} - e^{\lambda_n x}) + r_{n+1}(e^{\lambda_{n+2}x} - e^{\lambda_{n+1}x}) + \ldots.$$

Soit H un nombre supérieur à $|r_{n-1}|$, $|r_n|$, $|r_{n+1}|$, etc.; on a, puisque $x < 0$,

$$|R_{n-1}| < He^{\lambda_n x} + H\{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_{n+1}x} + e^{\lambda_{n+1}x} - e^{\lambda_{n+2}x} + \ldots\},$$

c'est-à-dire

$$|R_{n-1}| < 2He^{\lambda_n x},$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n} < \frac{\log 2H}{\lambda_n} + x.$$

On a donc, puisque x est aussi voisin de α qu'on le veut, et que λ_n devient infini avec n,

$$(9) \qquad -\beta \leqq \alpha.$$

Le rapprochement des inégalités (8) et (9) donne bien $\alpha = -\beta$.

Terminons par une remarque facile à déduire de la démonstration de M. Cahen et de celle qui précède. Quand l'abscisse de convergence est nulle, la formule (2) de M. Cahen est encore exacte (sauf peut-être si la série Σa_n avait en même temps une somme nulle); mais l'inverse n'est pas vrai, car le second membre de la formule (2) est nul lorsque l'abscisse de convergence est négative et ($\Sigma a_n \neq 0$). La formule (3) est exacte, même pour $\alpha = 0$, dès que le second membre a un sens, c'est-à-dire dès que la série Σa_n est convergente.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME DE M. BOREL SUR LES NOMBRES ABSOLUMENT NORMAUX ET DÉTERMINATION EFFECTIVE D'UN TEL NOMBRE;

Par M. W. Sierpinski.

On appelle, d'après M. Borel, *simplement normal* par rapport à la base q [1] tout nombre réel x dont la partie fractionnaire

[1] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 197, Paris, 1914.

donne un développement

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{q^k},$$

dans lequel les b_k sont des entiers inférieurs à q, tels que c_0^n, $c_1^n, \ldots, c_{q-1}^n$ désignant les nombres respectifs de fois que figurent les chiffres $0, 1, 2, \ldots, q-1$ parmi les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$, chacun des rapports

$$\frac{c_0^n}{n}, \quad \frac{c_1^n}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{c_{q-1}^n}{n}$$

a pour limite $\frac{1}{q}$ lorsque n augmente indéfiniment.

Lorsqu'un nombre donné est simplement normal par rapport à toutes les bases possibles ($q = 2, 3, 4, \ldots$), il est dit *absolument normal*.

Le but de cette Note est de donner une démonstration élémentaire (sans faire appel aux théorèmes de la théorie des ensembles) d'une proposition remarquable de M. Borel, d'après laquelle *presque tous les nombres réels sont absolument normaux*. Notre démonstration nous donnera en même temps un moyen de déterminer effectivement un nombre absolument normal.

Désignons pour tout système de nombres naturels donnés q, m, n, et pour tout nombre p de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$ par

$$\Delta_{q,m,n,p} \tag{1}$$

l'ensemble de tous les intervalles

$$\left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q^2} + \ldots + \frac{b_n}{q^n} - \frac{1}{q^n}, \ \frac{b_1}{q} + \ldots + \frac{b_n}{q^n} + \frac{2}{q^n}\right), \tag{2}$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des nombres de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$, satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} - \frac{1}{q} \right| \geq \frac{1}{m}, \tag{3}$$

$c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ désignant le nombre de fois que figure le nombre p parmi les termes $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Posons ensuite, ε étant un nombre positif donné quelconque,

$$n_{m,q}(\varepsilon) = \mathrm{E}\,\frac{24\,m^6 q^2}{\varepsilon} + 2 \tag{4}$$

et

$$(5) \qquad \Delta(\varepsilon) = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \Delta_{q,m,n,p};$$

ce sera évidemment un ensemble bien déterminé (dénombrable) d'intervalles, ne dépendant que de ε. Nous démontrerons que la somme des longueurs des intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est $< \varepsilon$ et que tout nombre x de l'intervalle $(0, 1)$ qui n'est intérieur à aucun des intervalles de l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est absolument normal.

Calculons d'abord la somme $S_{q,m,n,p}$ des longueurs de tous les intervalles de l'ensemble (1), où q, m et n sont des nombres naturels donnés ($q > 1$), et p est un nombre donné de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$. La longueur de tout intervalle (2) est évidemment $\frac{3}{q^n}$: pour calculer la somme $S_{q,m,n,p}$, il suffira donc de calculer combien d'intervalles (2) appartiennent à l'ensemble (1), c'est-à-dire combien de systèmes

$$(6) \qquad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n$$

de n entiers non négatifs $\leqq q-1$ satisfont à la condition (3).

Divisons les systèmes (6) en classes, en rangeant dans la $k^{\text{ième}}$ classe ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) tous les systèmes (6) pour lesquels

$$(7) \qquad c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n) = k.$$

Pour qu'un système (6) satisfasse à la condition (7), il faut et il suffit que, parmi les n termes de la suite (6), k soient égaux au nombre p, chacun des $n-k$ autres termes de la suite (6) pouvant prendre une des $q-1$ valeurs $0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, q$. Il s'ensuit sans peine qu'il y a

$$\binom{n}{k}(q-1)^{n-k}$$

systèmes (6) satisfaisant à la condition (7).

Désignons par $\theta(k)$ le nombre 1 ou 0, suivant que l'inégalité

$$(8) \qquad \left|\frac{k}{n} - \frac{1}{q}\right| \geqq \frac{1}{m}$$

est remplie ou non. Le nombre de systèmes (6) satisfaisant à la condition (3) est donc évidemment égal à la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \theta(k) \binom{n}{k} (q-1)^{n-k}.$$

Nous avons donc

$$S_{q,m,n,p} = \frac{3}{q^n} \sum_{k=0}^{n} \theta(k) \binom{n}{k} (q-1)^{n-k}. \tag{9}$$

D'après la définition du symbole $\theta(k)$ et d'après (8) nous avons pour $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\theta(k) \leq m^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

puisque pour $\theta(k) = 0$ l'inégalité (10) subsiste évidemment et que pour $\theta(k) = 1$ elle résulte de l'inégalité (8).

La formule (9) donne donc, d'après (10) [1],

$$S_{q,m,n,p} \leq \frac{3m^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}} q^{n+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^{\frac{1}{2}} (q-1)^{n-k}. \tag{11}$$

Pour calculer la dernière somme, posons

$$f(x) = (x^2 + q - 1)^n x^{-n}; \tag{12}$$

nous aurons évidemment

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^{n-k} x^{qk-n}. \tag{13}$$

Posons ensuite

$$x f'(x) = f_1(x), \quad x f'_1(x) = f_2(x), \quad x f'_2(x) = f_3(x), \quad x f'_3(x) = f_4(x); \tag{14}$$

d'après (13) et (14) nous aurons évidemment

$$f_4(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^{\frac{1}{2}} (q-1)^{n-k}; \tag{15}$$

---

(1) *Cf.* F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 420, Leipzig, 1914. M. Hausdorff ne considère d'ailleurs que le cas $q = 2$.

or, d'après (12) et (14), nous trouvons, en effectuant le calcul,

$$f_4(1) = n(q-1)q^n[3(q-1)n + q^2 - 6(q-1)];$$

donc, pour $q \geqq 2$, n naturel,

$$f_4(1) < 4n^2 q^{n+3}. \tag{16}$$

Nous avons donc, d'après (14) et (16),

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qk-n)^4 (q-1)^{n-k} < 4n^2 q^{n+3} \quad (^1)$$

et l'inégalité (11) donne

$$S_{q,m,n,p} < \frac{12m^4}{qn^2}. \tag{17}$$

D'après (5) nous concluons sans peine que la somme $S(\varepsilon)$ des longueurs de tous les intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ ne surpasse pas la somme

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} S_{q,m,n,p}:$$

donc, d'après (17), nous trouvons

$$S(\varepsilon) < \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \frac{12m^4}{qn^2} = 12 \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^4 \sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \tag{18}$$

Pour tout k naturel nous avons

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{k}; \tag{19}$$

donc, pour $k = \mathrm{E}\,\frac{24m^6q^2}{\varepsilon} + 1 > \frac{24m^6q^2}{\varepsilon}$, d'après (4),

$$\sum_{n=n_{m,q}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{24m^6q^2},$$

---

(1) Cette inégalité pourrait être évidemment démontrée sans faire appel au calcul différentiel.

et l'inégalité (18) donne

$$S(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \tag{20}$$

Or, d'après (19), nous trouvons sans peine

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < 2;$$

l'inégalité (20) donne donc

$$S(\varepsilon) < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que la somme des longueurs de tous les intervalles formant l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$ est inférieure à ε.

Désignons maintenant par $E(\varepsilon)$ l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle $(0, 1)$ qui ne sont intérieurs à aucun des intervalles appartenant à l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$: il est bien évident que $E(\varepsilon)$ est un ensemble bien déterminé, ne dépendant que de ε, et qu'il existe toujours pour $\varepsilon \leqq 1$. Je dis que tout nombre x de l'ensemble $E(\varepsilon)$ est un nombre absolument normal.

Soient, en effet, x un nombre donné de l'ensemble $E(\varepsilon)$, q un nombre naturel donné $\geqq 2$, et

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{q^k} \tag{21}$$

le développement du nombre x en fraction à base q.

Soit, ensuite, p un nombre donné de la suite $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Désignons maintenant par m un nombre naturel quelconque et posons

$$\mu = \frac{24 m^6 q^2}{\varepsilon} + 2. \tag{22}$$

Je dis que nous aurons l'inégalité

$$\left| \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} - \frac{1}{q} \right| < \frac{1}{m}, \qquad \text{pour } n > \mu. \tag{23}$$

Supposons, en effet, que pour un indice $n > \mu$ l'inégalité (23) ne subsiste pas. Nous aurons pour cet indice n l'inégalité (3), qui prouve que l'intervalle (2) appartient à l'ensemble (1), donc,

à plus forte raison, à l'ensemble (5), puisque, d'après (22) et (4) (n étant un nombre naturel $> \mu$), nous avons

$$n > n_{m,q}(\varepsilon).$$

Donc l'intervalle (2) appartient à l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$. Or, de (21), nous concluons sans peine que le nombre x est intérieur à l'intervalle (2). Le nombre x serait donc intérieur à un intervalle de l'ensemble $\Delta(\varepsilon)$, ce qui est impossible, puisque x appartient à l'ensemble $E(\varepsilon)$.

Nous avons ainsi démontré que pour tout nombre naturel m existe un nombre correspondant μ, pour lequel subsiste (23), ce qui prouve que

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n} = \frac{1}{q}.$$

La formule (24) étant vraie pour $p = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, nous en concluons que le nombre x est simplement normal par rapport à la base q.

Le nombre x est donc simplement normal par rapport à toute base $q = 2, 3, 4, \ldots$: c'est donc un nombre absolument normal.

Nous avons ainsi démontré que tout nombre de l'ensemble $E(\varepsilon)$ est absolument normal. Il s'ensuit que tous les nombres de l'intervalle $(0, 1)$ qui ne sont pas absolument normaux peuvent être enfermés dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε, et cela pour tout ε positif, donné arbitrairement *a priori*. En d'autres termes, *l'ensemble de tous les nombres de l'intervalle* $(0, 1)$ *qui ne sont pas absolument normaux est de mesure nulle*, ce qui constitue le théorème de M. Borel.

Nous allons maintenant déterminer effectivement un nombre absolument normal. Considérons l'ensemble $E(1)$: ce sera évidemment un ensemble bien déterminé de nombres de l'intervalle $(0, 1)$, non vide [puisque les ensembles $E(\varepsilon)$ existent pour $\varepsilon \leq 1$]. Désignons par ξ la borne inférieure de l'ensemble $E(1)$; ξ sera donc un nombre réel bien déterminé. Il suit sans peine de la définition de la borne inférieure et de la définition de l'ensemble $\varepsilon(1)$, que ξ ne peut être intérieur à aucun intervalle appartenant à l'ensemble $\Delta(1)$. Il en résulte que ξ appartient à l'ensemble $\varepsilon(1)$: c'est donc un nombre absolument normal.

Nous avons donc déterminé effectivement un nombre absolument normal.

SUR CERTAINES DÉMONSTRATIONS D'EXISTENCE;

PAR M. H. LEBESGUE.

Dans une lettre, adressée à M. Borel, et qui accompagnait l'envoi de l'article précédent, M. Sierpinski se demandait si cet article devait être publié, s'il ne ferait pas double emploi avec une démonstration que j'avais indiquée à M. Borel et que celui-ci a signalée dans la deuxième édition de ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (p. 198).

Comme on va le voir, les deux articles, loin de faire double emploi, se complètent : ce qui est traité un peu trop rapidement dans l'un est complètement traité dans l'autre et inversement.

Le présent article avait été écrit en 1909, à la demande de M. Borel, pour être mis en note d'un de ses Ouvrages. M. Borel n'a pu le publier à l'époque. Je le donne ici sans changement, mais, comme je ne l'écrirais pas actuellement tout à fait de même, je crois devoir ajouter quelques explications.

C'était l'époque des discussions sur le raisonnement célèbre de M. Zermelo; j'avais précisé le débat en demandant : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? (1) et, en même temps, j'avais appelé l'attention sur certaines démonstrations d'existence d'ensembles qui ne semblaient pas permettre de définir un de ces ensembles.

Je venais d'examiner ces définitions dans un Mémoire qui parut peu de temps après (2); ma conclusion était que, à celles de ces définitions qui ne sont pas illusoires, il est possible d'apporter des précisions qui conduisent à la définition d'un des ensembles dont on démontre l'existence.

Le présent article est consacré au cas plus simple de quelques modes de démonstrations d'existence de nombres. Bien que les

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, décembre 1904.
(2) *Journal de Mathématiques*, 1905.

indications qu'il contient paraîtront maintenant banales, il m'avait semblé nécessaire de l'écrire après avoir lu les lignes suivantes dans un travail de M. Borel : « Dans l'état actuel de la Science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, *soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal; si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la » mesure des nombres absolument normaux compris entre* 0 *et* 1 *est égale à* 1 (¹).

Or, voici ma thèse : si l'on a pu démontrer que le complémentaire B, $[B = (0, 1) - A]$ d'un ensemble A, formé de nombres compris entre 0 et 1, est de mesure inférieure à 1, de la démonstration même on peut déduire la définition d'un nombre de A.

Bien entendu la démonstration ne saurait résulter de l'écriture des lettres A et B, il faut connaître sur A autre chose que son nom, A; mais si A est donné par ses propriétés caractéristiques et si, de ces propriétés, on a déduit logiquement la preuve que la mesure de B est inférieure à 1, on est dans le cas que je considère.

C'est la légitimation de cette affirmation générale, qui est la partie principale de ma Note. Je l'applique ensuite aux nombres absolument normaux, mais sans préciser aussi nettement que M. Sierpinski la preuve que la mesure de l'ensemble de ces nombres est égale à 1. J'avais cependant repris cette démonstration, parce que le raisonnement de M. Borel prêtait à quelques objections à cause de l'emploi de probabilités dont l'indépendance n'est pas évidente (²), et surtout pour avoir une fois de plus, et dans un cas un peu plus compliqué, l'occasion d'appliquer les procédés qui m'avaient déjà servi dans mes *Leçons sur l'intégration* et dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, pour prouver

---

(¹) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1er semestre 1909.

Les *italiques* sont de moi. J'ai modifié la forme de la fin de la phrase pour ne pas avoir à définir le mot *probabilité*.

(²) C'est à l'occasion d'observations analogues (Bernstein, *Math. Ann.*, Band 71; Borel, *Math. Ann.*, Band 72) que cet article a été recherché dans les papiers de M. Borel.

que certains ensembles sont mesurables B. Ces procédés, bien connus aujourd'hui, étaient encore nouveaux alors. Il convient de rappeler que la seule fois où, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, M. Borel rencontre l'occasion d'appliquer ses idées sur la mesure à la solution d'une question de la théorie des fonctions, il ne peut affirmer que l'ensemble étudié est bien mesurable B [1]. C'est dans une Note de 1904 et dans mon Mémoire de 1905 que j'ai fixé la portée, tout à fait insoupçonnée alors, de la notion d'ensemble mesurable B.

---

1. Quand on veut prouver l'existence de nombres vérifiant une certaine condition, on emploie souvent un raisonnement par l'absurde consistant à démontrer sur l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée une propriété qui n'appartient pas à l'ensemble de tous les nombres. L'exemple classique de ce mode de raisonnement est la démonstration, par G. Cantor, de l'existence des nombres transcendants. La démonstration utilise ces propriétés : les nombres non transcendants forment un ensemble dénombrable et l'ensemble de tous les nombres n'est pas dénombrable.

On pourra utiliser un raisonnement analogue toutes les fois qu'on saura que l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée : (a) est dénombrable, ou (b) est partout non dense, ou (c) est de première catégorie [2], ou encore (d) si l'on sait que l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée et compris dans un intervalle (α, β) est de mesure plus petite que $\beta - \alpha$.

On se sent forcé d'admettre que ce mode de raisonnement prouve l'existence d'un ensemble de nombres satisfaisant à la condition considérée, mais on peut prétendre qu'il ne fournit pas la preuve de l'existence *d'un* nombre satisfaisant à cette condition, car il ne fournit aucun moyen de distinguer des autres un des nombres de l'ensemble dont il prouve l'existence, c'est-à-dire de nommer *un* nombre satisfaisant à la condition imposée.

---

(1) Page 67 (note 1).

(2) La notion d'ensemble de première catégorie est due à M. R. Baire (*voir* sa Thèse, *Annali di Mathem.*, 1899).

Cette difficulté n'est pas sérieuse ici. Supposons que l'on ne s'occupe que de nombres compris entre 0 et 1 et admettons d'abord qu'on est dans le cas (a).

Désignons les nombres ne vérifiant pas la condition considérée par u_1, u_2, ...; le nombre x, défini par la condition d'avoir pour $p^{\text{ième}}$ chiffre décimal 1 ou 2 suivant que le $p^{\text{ième}}$ chiffre de u_p est différent de 1 ou lui est égal [1], répond à la question. C'est en somme le raisonnement même de Cantor.

Admettons maintenant qu'on soit dans le cas (c) qui contient comme cas particulier (b) [et aussi le cas (a)] puisqu'un ensemble est dit de première catégorie s'il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses U_1, U_2, ... Considérons la suite d'intervalles (S)

$$(S)\quad \begin{cases} \left(0, \frac{1}{10}\right); \quad \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right); \quad \ldots; \quad \left(\frac{9}{10}, 1\right); \quad \left(0, \frac{1}{100}\right); \\ \left(\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right); \quad \ldots; \quad \left(\frac{99}{100}, 1\right); \quad \left(0, \frac{1}{1000}\right); \quad \ldots \end{cases}$$

Soit I_1 le premier de ces intervalles ne contenant à son intérieur aucun nombre de U_1. Ne conservons dans la suite que ceux des intervalles qui sont entièrement, c'est-à-dire extrémités comprises, intérieurs à I_1 et soit I_2 le premier de ceux-là ne contenant à son intérieur aucun nombre de U_2, etc. Le nombre commun à I_1, I_2, ... satisfait à la condition imposée. C'est le raisonnement même de M. Baire, précisé seulement quant au choix des I_1, I_2, ...

2. C'est à cause de cette précision, puérile tant elle est immédiate, que l'on peut dire avoir nommé *un* nombre répondant à la question. Il est certain que toutes les propriétés de ce nombre sont des conséquences logiques de sa définition; mais cela est illusoire en pratique, car, dans la plupart des cas, on ne saura pas tenir compte de ce que I_1, I_2, ... sont les *premiers* intervalles jouissant de certaines propriétés. Doit-on, à cause de cela, considérer cette définition d'un nombre comme illusoire et, adoptant à

---

[1] On fait telle convention que l'on veut relativement à la façon d'écrire dans le système décimal ceux des u_p qui sont des fractions décimales exactes.

peu près le point de vue de Kronecker, exiger une définition fournissant un *procédé de calcul* du nombre défini?

Une telle exigence me paraîtrait tout à fait exagérée. Si l'on sait faire le choix des I_1, I_2, ..., on sait obtenir les décimales successives du nombre défini; mais, pour choisir I_1, il faut connaître U_1, U_2, ... Si l'on sait démontrer que l'ensemble des nombres ne répondant pas à la question est de première catégorie on sait aussi, le plus souvent, nommer les ensembles U_1, U_2, ... Nommer U_1, c'est nommer une propriété de ses points; si l'on sait démontrer que U_1 est partout non dense, on sait aussi, le plus souvent, déterminer les intervalles α_1, α_2, ... contigus à cet ensemble et alors, par un nombre fini d'équations, on trouvera, I_1. Les intervalles I_2, I_3 se détermineront de même.

Sans doute il n'y a pas là l'indication d'un procédé opératoire régulier; mais, dans la plupart des cas se présentant pratiquement, on voit comment, à partir de la définition de l'ensemble de première catégorie, on doit opérer pour calculer un nombre ne faisant pas partie de l'ensemble [1]; à mesure que l'on connaît mieux l'ensemble de première catégorie donné, à mesure qu'il est donné plus simplement, le procédé de calcul apparaît mieux et se précise d'avantage.

Il me semble que c'est là tout ce qu'on peut demander; demander plus ce serait vouloir que de cette seule hypothèse « on a énoncé une propriété caractérisant les nombres d'un ensemble de première catégorie » on déduise un procédé de calcul applicable quelque bizarre que soit la propriété énoncée; on voudrait une réponse plus précise que l'énoncé; à une question idéaliste on exigerait une réponse empiriste.

A ce compte, ne devrait-on pas dire que la définition classique de l'intégrale des fonctions continues est illusoire puisqu'elle ne fournit pas de procédé de calcul pour

$$\int_0^1 x\left[\lim_{m=\infty}\lim_{n=\infty}(\cos m!\,\pi C)^{2n}\right]dx,$$

---

[1] Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que c'est la *loi du calcul*, c'est-à-dire l'ensemble des mots définissant le nombre, qui est seule intéressante ici et non pas les premiers résultats du calcul, les premiers chiffres décimaux du nombre à définir, puisque ce nombre est choisi dans un ensemble partout dense et qu'on peut par suite se donner arbitrairement ses premiers chiffres.

quand C est la constante d'Euler? ou encore que la règle d'addition des fractions par la réduction au même dénominateur est illusoire parce que ce ne serait pas celle qu'on pourrait employer si l'on avait besoin de la somme des nombres de Bernoulli $B_{1000^{1000}}$, $B_{2000^{2000}}$ (1)?

En résumé, il me semble qu'on doit exiger de la démonstration de l'existence d'une catégorie d'êtres mathématiques qu'elle contienne l'énoncé des caractéristiques logiques d'*un* de ces êtres, mais cela seulement. Il est souhaitable que cet énoncé conduise au moins dans les cas plus simples à un procédé de construction effective de l'être défini et que ce procédé soit d'autant plus régulier et précis que les données sont plus particulières.

Comme exemple d'une démonstration d'existence ne remplissant aucune de ces conditions je citerai la preuve, donnée par M. Zermelo, du théorème suivant : *Un ensemble quelconque* M *étant donné, il existe un ensemble bien ordonné* M_1 *correspondant à* M, *élément à élément, d'une façon univoque et réciproque* (2).

M. Zermelo indique en effet comment on construirait M_1 si l'on avait choisi une correspondance entre chaque sous-ensemble de M et un des éléments de ce sous-ensemble; mais il considère comme évidente l'existence de telles correspondances sans chercher aucunement à caractériser l'une d'elles. De plus le procédé de construction de M_1 semble ne pouvoir même pas servir dans des cas particuliers, car les seuls cas particuliers où l'on a pu jusqu'ici nommer une correspondance de la nature de celles que M. Zermelo utilise sont ceux où l'on connaît à l'avance M_1 et même c'est le plus souvent en utilisant cet ensemble M_1 qu'on nomme la correspondance (3).

3. Plaçons-nous maintenant dans le cas (*d*) (4). On suppose donc donné un ensemble de mesure inférieure à 1 et il s'agit de

---

(1) Il me semble que si l'on prend pour critère de la bonté d'une définition la possibilité d'effectuer un calcul numérique, les difficultés que l'on rencontre dans ces deux exemples doivent être considérées comme aussi graves l'une que l'autre.

(2) *Math. Annalen*, Band 59, 1904, p. 514-516.

(3) *Voir* une Note de M. E. Borel dans les *Math. Annalen*, Band 60, 1905, p. 194-195.

(4) Le cas (*d*) ne contient pas le cas (*c*), car un ensemble peut être de première catégorie et avoir pour complémentaire un ensemble de mesure nulle.

montrer qu'il existe dans $(0, 1)$ des points ne faisant pas partie de l'ensemble. En d'autres termes : un ensemble de mesure non nulle contient des points, et par suite, une infinité non dénombrable de points. C'est la propriété que M. E. Borel utilise surtout dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* et c'est en vue de cette utilisation qu'il a introduit la notion d'ensembles mesurables et en particulier celle d'ensemble de mesure non nulle.

Si l'on se rappelle le procédé que j'emploie pour définir la mesure, on peut énoncer le théorème à démontrer sous la forme suivante : *Étant donné un ensemble dénombrable d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à* 1, *il existe des points de* $(0, 1)$ *ne faisant partie d'aucun de ces intervalles.* Sous cette forme la proposition avait été utilisée par M. Borel dans sa Thèse [1].

Soient $U_1, U_2, \ldots$ les intervalles donnés; la longueur de U_p sera α_p ou un nombre plus petit, mais les α_p sont tels que la série $\sum \alpha_p$ est convergente et de somme plus petite que 1. Pour éviter une petite difficulté accessoire, je supposerai qu'aux intervalles donnés on en a ajouté de nouveaux de façon que l'on soit certain que les extrémités des intervalles donnés primitivement sont toutes intérieures à un autre; c'est cet ensemble total d'intervalles qui est désigné par $U_1, U_2, \ldots$. Il suffira qu'un point soit extérieur à $U_1, U_2, \ldots$ ou extrémité de certains d'entre eux sans être *intérieur* à aucun autre pour qu'il réponde à la question.

Considérons les p_1 premiers intervalles $U_1, U_2, \ldots, U_p$; soient $s_0^{p_1}, s_1^{p_1}, \ldots, s_9^{p_1}$ la longueur totale des parties de ces intervalles qui sont comprises respectivement dans le premier, dans le deuxième, etc., dans le dixième intervalle de la suite S du n° 1. Posons

$$s = \sum_1^{\infty} \alpha_p, \qquad s_p = \sum_1^{p} \alpha_p, \qquad r_p = s - s_p, \qquad r = 1 - s.$$

On a

$$s_0^{p_1} + s_1^{p_1} + \ldots + s_9^{p_1} = s_{p_1},$$

d'où

$$(s_0^{p_1} + r_{p_1}) + (s_1^{p_1} + r_{p_1}) + \ldots + (s_9^{p_1} + r_{p_1}) = s_{p_1} + 10\, r_{p_1} = s + 9\, r_{p_1};$$

---

[1] *Loc. cit.*

donc, quand p_1 aura été choisi assez grand, cette somme sera inférieure à 1 et l'une au moins des quantités $s_i^{p_1} + r_{p_1}$ sera au plus égale à $\frac{s + 9r_{p_1}}{10}$, donc inférieure à $\frac{1}{10}$. Quand p_1 sera choisi, on donnera à i la plus petite valeur possible satisfaisant aux conditions imposées; soit i_1 cette valeur.

On partagera alors l'intervalle $\left(\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$ en 10 parties égales et par la considération de ces 10 parties et des p_2 premiers intervalles U ($p_2 > p_1$) on formera les sommes $\sigma_0^{p_2}, \ldots, \sigma_9^{p_2}$ analogues aux $s_j^{p_1}$. On aura

$$(\sigma_0^{p_2} + r_{p_2}) + \ldots + (\sigma_9^{p_2} + r_{p_2}) \leqq \sigma_0^{p_2} + \ldots + \sigma_9^{p_2} + 10\, r_{p_2}$$
$$\leqq (s_i^{p_1} + r_{p_1} - r_{p_2}) + 10\, r_{p_2} \leqq (s_i^{p_1} + r_{p_1}) + 9\, r_{p_2} \leqq \frac{1}{10}(s + 9\, r_{p_1}) + 9\, r_{p_2}.$$

Si donc p_1 et p_2 sont assez grands pour que

$$s + 9\, r_{p_1} + 90\, r_{p_2}$$

soit plus petit que 1, l'une des quantités $\sigma_i^{p_2} + r_{p_2}$ sera au plus égale à $\frac{s + 9\, r_{p_1} + 90\, r_{p_2}}{100}$, donc plus petite que $\frac{1}{100}$. Quand p_1 et p_2 seront choisis, i_2 désignera le plus petit indice i tel qu'il en soit ainsi.

Continuant de même on arrivera à déterminer un nombre i_3 et à écrire la condition

$$s + 9\, r_{p_1} + 90\, r_{p_2} + 900\, r_{p_3} < 1,$$

et ainsi de suite.

Toutes les conditions seront remplies si la série

$$s + 9\, r_{p_1} + 90\, r_{p_2} + 900\, r_{p_3} + 9000\, r_{p_4} + \ldots$$

est convergente et de somme au plus égale à 1. Nous pouvons donc convenir de prendre pour p_1 le premier entier tel qu'on ait

$$r_{p_1} \leqq \frac{r}{18}$$

et, pour $k > 1$, de prendre pour p_k le premier entier supérieur à p_{k-1} et tel qu'on ait

$$r_{p_k} \leqq \frac{r}{2^k . 9 . 10^{k-1}}.$$

Les entiers p_k étant ainsi définis, les entiers i_k sont déterminés et le nombre qui, dans le système décimal, est représenté par le développement $0, i_1 i_2 i_3 \ldots$ répond évidemment à la question. On voit que pour obtenir les k premières décimales il suffit de se servir des p_k premiers intervalles, le nombre p_k étant d'ailleurs déterminé à l'avance par la seule étude de la série $\sum \alpha_p$. Quant à cette série elle se présente en général d'elle-même, si en effet on a pu vérifier par le calcul qu'un ensemble dénombrable d'intervalles donné numériquement a une mesure inférieure à 1, c'est qu'on a pu trouver, pour la série des longueurs des intervalles, une série majorante dont on sait calculer la somme inférieure à 1.

4. Il faudrait indiquer maintenant un procédé permettant, un ensemble mesurable étant donné, de l'enfermer dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la mesure diffère aussi peu que l'on veut de l'ensemble donné. Il est manifestement impossible de nommer un procédé régulier si l'on ne précise pas la façon dont est donné l'ensemble mesurable; tout ce que l'on peut faire c'est indiquer des exemples qui, pour d'autres cas analogues, suggéreront peut-être des artifices utilisables.

Pour tous les ensembles que l'on a démontré être mesurables, la démonstration a consisté à prouver que ces ensembles pouvaient être enfermés dans des ensembles construits à partir d'intervalle par les opérations suivantes :

I. Faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis;

II. Prendre la partie commune à une infinité dénombrables d'ensembles précédemment définis;

III. Passer d'un ensemble à son complémentaire.

Cette troisième opération permet d'ailleurs de supprimer l'une des opérations I ou II.

Il est évident que, si l'on connaît la loi de formation d'un ensemble à l'aide des opérations I, II, III à partir d'intervalles donnés, il est facile de l'enfermer dans des intervalles satisfaisant à la condition indiquée.

Tout revient donc à trouver cette loi de formation et les intervalles primitifs. J'ai dit ailleurs comment on avait cette loi pour des ensembles définis par des égalités ou inégalités entre des fonctions dont on connaît une représentation analytique ([1]). Je me contenterai ici de donner un exemple où cette loi s'obtient très simplement parce que l'ensemble est défini par une propriété des chiffres des nombres de l'ensembles ([2]).

Proposons-nous de nommer un nombre absolument normal, M. Borel ([3]) appelle ainsi un nombre normal par rapport à toutes les bases de numération possible. Il dit qu'un nombre est normal par rapport à la base q si, ce nombre étant exprimé dans le système de base q et un groupement quelconque de p chiffres consécutifs étant considéré, le nombre de fois c_n que se rencontre ce groupement dans les n premiers chiffres après la virgule satisfait à la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n} = \frac{1}{q^p},$$

quel que soit l'entier p et le groupement considéré.

M. Borel démontre que l'ensemble des nombres absolument normaux compris entre 0 et 1 a une mesure égale à 1 ; en utilisant ce qui précède, pour nommer un nombre absolument normal de (0, 1), il suffit donc d'indiquer un moyen d'enfermer le complémentaire dans des intervalles de longueur totale au plus égale à un nombre ε, donné, inférieur à 1.

Pour qu'un nombre A soit absolument normal, il faut et il suffit évidemment que, quels que soient les entiers p, q, r, $p > 0$, $q > 0$, $q > r > 0$, le nombre $p^r A$ étant écrit dans le système de base p^q, si l'on désigne par $c_0, c_1, \ldots, c_{p^q-1}$ les nombres de fois que figurent les chiffres $0, 1, \ldots, p^q - 1$ dans les n premiers chiffres après la virgule, les rapports

$$\frac{c_0}{n}, \quad \frac{c_1}{n} \quad \ldots, \quad \frac{c_{p^q-1}}{n}$$

([1]) *Journal de Mathématiques*, 1905.

([2]) *Voir* un exemple analogue, mais plus simple, dans mes *Leçons sur l'intégration*, p. 109.

([3]) *Rend. del Circolo math. di Palermo*, t. XXVII, 1909, p. 247-271.

tendent vers la même limite, $\frac{1}{p^q}$, quand n augmente indéfiniment. Appelons $E_{p,q,r}$ l'ensemble des nombres pour lesquels la condition précédente est remplie pour les valeurs p, q, r des entiers considérés. Soient l'ensemble E des nombres absolument normaux de $(0, 1)$, C son complémentaire, $C_{p,q,r}$ le complémentaire de $E_{p,q,r}$. On a évidemment

$$C = \sum_p \sum_q \sum_r C_{p,q,r}.$$

Si donc on choisit des nombres positifs $\varepsilon_{p,q,r}$ tels que

$$\varepsilon = \sum_p \sum_q \sum_r \varepsilon_{p,q,r},$$

il suffit d'enfermer chaque $C_{p,q,r}$ dans des intervalles dont la longueur totale est $\varepsilon_{p,q,r}$ au plus.

Pour simplifier le langage je prends le cas $p = 3$, $q = r = 1$ et je pose

$$E_{3,1,1} = \mathcal{E}, \qquad C_{3,1,1} = \mathfrak{C}, \qquad \varepsilon_{3,1,1} = 2e.$$

$\mathcal{E}$ est la partie commune à tous les ensembles $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ formés des nombres pour lesquels les rapports $\frac{c_0}{n}$, $\frac{c_1}{n}$ tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$; auquel cas $\frac{c^2}{n}$ tend également vers $\frac{1}{3}$.

C'est donc la somme des deux ensembles C_0, C_1 complémentaires de $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et il suffit d'enfermer chacun d'eux dans des intervalles de longueur totale au plus égale à e. Prenons C_0, par exemple.

$\mathcal{E}_0$ est la partie commune à tous les ensembles $\mathcal{E}_{0,\alpha}$, pour toutes les valeurs entières de α; $\mathcal{E}_{0,\alpha}$ est formé des nombres pour lesquels on a toujours, pour n assez grand,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} < \frac{c_0}{n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}.$$

C_0 est donc la somme des $C_{0,\alpha}$, complémentaires des $\mathcal{E}_{0,\alpha}$, et il suffit d'enfermer $C_{0,\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ dans des intervalles de longueur totale $\frac{e}{2^\alpha}$.

$\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta}$ étant l'ensemble des nombres pour lesquels la double inégalité précédente est vérifiée dès que n est au moins égal à β;

$\mathcal{E}_{0,\alpha}$ est la somme des $\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta}$, β prenant les valeurs 1, 2, ... Mais $\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta}$ étant évidemment contenu dans $\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta+1}$, on peut ne donner à β qu'une infinité arbitrairement choisie de valeurs entières croissantes. $C_{0,\alpha}$ est donc la partie commune à une infinité quelconque des $C_{0,\alpha,\beta}$, complémentaires des $\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta}$, et il suffit de montrer comment, pour une valeur assez grande de β, on peut enfermer $C_{0,\alpha,\beta}$ dans des intervalles de longueur totale $\frac{e}{2^\alpha}$ au plus.

Or $C_{0,\alpha,\beta}$ est la somme des ensembles $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ ($\gamma = 0, 1, 2, \ldots$). $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ étant formé des nombres pour lesquels la double inégalité précédente n'est pas vérifiée pour $n = \beta + \gamma$. Il suffit donc, pour arriver à la détermination de β, de montrer que la série $\sum_\gamma$ mesure $[C_{0,\alpha,1,\gamma}]$ est convergente et de trouver combien de termes on doit négliger au commencement pour que la somme de ceux qui restent ne surpasse pas $\frac{e}{2^\alpha}$.

Or $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est formé d'un certain nombre d'intervalles de la forme $\left(\frac{p}{2^{\gamma+1}}, \frac{p+1}{2^{\gamma+1}}\right)$. Tous ces intervalles sont égaux et la somme totale de leurs mesures est 1, donc la mesure de $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est la probabilité pour qu'en choisissant $\gamma + 1$ fois l'un des chiffres 0, 1, 2, le chiffre 0 ne se présente pas un nombre de fois compris entre $(\gamma+1)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)$ et $(\gamma+1)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}\right)$. C'est-à-dire qu'à très peu près [1] la mesure de $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2}{3\alpha}\sqrt{\gamma+1}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt;$$

ou, en posant $e^{-t^2} = u$,

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}}^{e^{\infty}} \frac{du}{\sqrt{-\log u}} < \frac{1}{\pi} e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\log u}}\right]_{u=e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}} = \frac{3\alpha e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}}{2\sqrt{\pi(\gamma-1)}}.$$

Ceci est le terme général de rang γ d'une série convergente; on

---

[1] Pour être rigoureux il faudrait évidemment tenir compte de l'erreur commise dans cette approximation, il nous suffira ici d'être certain qu'elle ne modifiera pas la conclusion, ce qui résulte du fait que l'erreur relative tend vers zéro. (On pourrait aussi imiter les calculs de M. Sierpinski.)

pourrait donc indiquer un procédé régulier pour choisir β en fonction de α et alors les $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ $(\gamma \geqq 0)$ couvriraient $C_{0,\alpha,\beta}$ donc $C_{0,\alpha}$ comme nous le voulons.

Il n'y aurait donc aucune difficulté à nommer un nombre absolument normal; nous avons en passant démontré à nouveau que l'ensemble des nombres absolument normaux est de mesure égale à 1.

LES CLASSES DE NOYAUX SYMÉTRISABLES;

Par M. T. Lalesco.

1. *Définitions.* — Nous dirons qu'un noyau $N(xy)$ [1] est symétrisable s'il peut être rendu symétrique par la composition avec un noyau symétrique $G(xy)$.

Comme il existe deux catégories de noyaux symétriques définies par la relation

$$A(xy) = \varepsilon A(yx) \qquad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1}$$

il faut distinguer quatre catégories de noyaux symétrisables, suivant la nature du facteur composant et celle du noyau composé.

Convenons d'employer la notation suivante :

On peut caractériser chaque catégorie de noyaux symétriques par le ε qui figure dans l'équation (1) définissant sa symétrie. Nous dirons alors qu'un noyau symétrique $G(xy)$ est du type (ε).

D'une manière analogue, nous dirons qu'un noyau symétrisable $N(xy)$ est du type $(\varepsilon, \varepsilon')$, si (ε) est le type du facteur composant et (ε') celui du noyau composé.

Il résulte ainsi les quatre types de noyaux symétrisables suivants : 1° $(1, 1)$; 2° $(1, -1)$; 3° $(-1, 1)$, et 4° $(-1, -1)$. Nous verrons dans la suite qu'ils se réduisent à trois types distincts.

---

[1] Dans tout cet article, nous avons écrit d'une façon générale $N(xy)$ à la place de $N(x, y)$, pour simplifier l'écriture.

2. *Exemples :*

1° *Tout noyau composé de* DEUX *noyaux symétriques est un noyau symétrisable.*

Prenons deux noyaux $G(xy)$ et $H(xy)$ de types (ε) et (ε') respectivement. Le produit

$$\int H(xs)\,G(sy)\,ds$$

est symétrisable et de type $(\varepsilon, \varepsilon')$.

2° *Les noyaux de la forme*

$$A(x)\,G(xy)\,B(y),$$

où $G(xy)$ est un noyau symétrique du type (ε), *sont des noyaux symétrisables du type* $(\varepsilon, 1)$.

Ces noyaux, qui se présentent fréquemment dans les applications, sont désignés sous le nom de *noyaux polaires.*

3° *Tout noyau itéré d'un noyau symétrisable est aussi symétrisable.*

Soit $N(xy)$ un noyau symétrisable du type $(\varepsilon, \varepsilon')$ dont la symétrie est définie par la relation

$$\int G(xs)\,N(sy)\,ds = K(xy).$$

On a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N_2(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N(ty)\,ds\,dt\\ &= \varepsilon'\int G(ts)\,N(sx)\,N(ty)\,ds\,dt\\ &= \varepsilon\varepsilon'\int G(st)\,N(sx)\,N(ty)\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que l'échange des x et y entre eux revient à changer $G(st)$ en $G(ts)$.

Le noyau $\int G(xs)\,N_2(sy)\,ds$ est donc symétrique et du même type que $G(xy)$.

D'une façon analogue, on a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(3)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N(tu)\,N(uy)\,ds\,dt\\ &= \int K(xt)\,N(tu)\,N(uy)\,dt\,du\\ &= \varepsilon\varepsilon'\int K(tu)\,N(tx)\,N(uy)\,dt\,du,\end{aligned}$$

ce qui montre que le noyau $\int G(xs)\,N^{(3)}(sy)\,ds$ est symétrique et du type (ε').

La règle est générale :

Tout noyau itéré d'ordre pair d'un noyau symétrisable $(\varepsilon, \varepsilon')$ *est aussi symétrisable et du type* $(\varepsilon, \varepsilon)$; *tout noyau itéré d'ordre impair et symétrisable, est du type* $(\varepsilon, \varepsilon')$.

En effet, pour un noyau itéré d'ordre $2p$, on a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(2p)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N_p(st)\,N_p(ty)\,ds\,dt\\ &= \pm\int G(st)\,N_p(sx)\,N_p(ty)\,ds\,dt,\end{aligned}$$

et, pour un noyau d'ordre $2p+1$,

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(2p+1)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N_p(tu)\,N_p(uy)(stu)\\ &= \pm\int K(tu)\,N_p(tx)\,N_p(uy)\,du\,dt.\end{aligned}$$

On peut réunir ces deux résultats, dans l'énoncé suivant :

Tout noyau itéré est symétrisable et du type

$$[\varepsilon, \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^k],$$

k étant l'ordre du noyau.

3. *Les facteurs composants. — Un noyau symétrisable admet une infinité de facteurs composants.*

En effet, si $G(xy)$ est un facteur composant, nous venons de voir que les noyaux symétriques

$$K_p(xy) = \int G(xs)\,N^{(p)}(sy)\,ds$$

le sont aussi, car on a

$$\int K_p(xs)\,N(sy)\,ds = \int G(xs)\,N^{(p+1)}(sy)\,ds.$$

Il y a dès lors lieu de considérer, dans la famille des facteurs composants, le noyau de puissance minimum, ou l'un d'eux s'il y en a plusieurs; nous dirons que c'est un facteur composant primitif et nous le désignerons par la notation $A(xy)$.

4. *Le genre d'un noyau symétrisable.* — La composition avec le facteur composant peut se faire à droite ou à gauche. Ainsi, par exemple, le produit des noyaux symétriques $G(xy)$ et $H(xy)$ est symétrisable à gauche par le facteur $H(xy)$ et à droite par $G(xy)$.

De même, les noyaux polaires, définis précédemment, sont symétrisables à gauche par $B(x)\,G(xy)\,B(y)$ et à droite par $A(x)\,G(xy)\,A(y)$.

Une question se pose dès lors : Un noyau qui est symétrisable d'un côté, l'est-il aussi de l'autre côté ?

Il en est certainement ainsi pour une catégorie étendue de noyaux symétrisables.

Nous définirons pour cela une notion nouvelle, celle du *genre* d'un noyau symétrisable.

Considérons l'équation intégrale

$$(2) \qquad N^{(g)}(xy) = \int B(xs)\,A(sy)\,ds,$$

où $A(xy)$ désigne un facteur composant à gauche et primitif de $N(xy)$ et $N^{(g)}(xy)$ le noyau itéré de puissance g. Il peut arriver qu'à partir d'une certaine valeur de g cette équation soit résoluble; la valeur minimum de g, à partir de laquelle l'équation (2) est résoluble diminuée d'une unité, sera appelée le *genre* du noyau symétrisable considéré.

Dans la pratique, lorsque le noyau $N(xy)$ et le facteur composant sont donnés, il est facile de déterminer le genre ou en tout cas une limite supérieure, soit par des remarques directes, soit en appliquant le théorème de Picard.

Ainsi, par exemple, les noyaux symétrisables, produits com-

posés de deux noyaux symétriques, sont de genre *zéro*. En effet pour un pareil noyau

$$N(xy) = \int H(xs)\, G(sy)\, ds,$$

dont $G(xy)$ est un facteur composant, on voit que $g = 1$, par la définition même du noyau.

Les noyaux polaires sont de genre au plus égal à 1, car

$$\begin{aligned} N_2(xy) &= \int A(x)\, G(xs)\, B(s)\, A(s)\, G(sy)\, B(y)\, ds \\ &= \int A(x)\, G(xs)\, A(s)\, B(s)\, G(sy)\, B(y)\, ds. \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $B(x)\, G(xy)\, B(y)$ est, pour $N(xy)$, un facteur composant à gauche. Donc $g \leqq 2$.

Enfin, il est évident que les noyaux itérés d'un noyau symétrisable, ont un genre plus petit ou au plus égal au genre du noyau considéré.

5. *Facteurs composants associés.* — On a le théorème suivant :

Tout noyau symétrisable fermé et de genre fini est symétrisable des deux côtés, à gauche et à droite.

Nous montrerons pour cela que :

1° *Le noyau* $B(xy)$ *est symétrique.* — En effet, on a

$$\int A(xs)\, N^{(g)}(sy)\, ds = \int A(xs)\, B(st)\, A(ty)\, ds.$$

Or le noyau du premier membre est symétrique, et du type

$$\varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g.$$

Il résulte alors que l'on aura

$$\int A(xs)[B(st) - \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g\, B(ts)]\, A(ty)\, ds\, dt \equiv 0.$$

Donc, puisque $N(xy)$ est un noyau fermé, on aura

$$B(xy) = \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g\, B(yx).$$

2° *Le noyau* $K(xy) = \int N(xs)\,B(sy)\,ds$ *est symétrique.* — En effet, on a

$$N^{(g+1)}(x) = \int N(xs)\,B(st)\,A(ty)\,ds\,dt.$$

Donc

$$\int A(xs)\,N^{(g+1)}(sy)\,ds = \int A(xs)\,K(st)\,A(sy)\,ds;$$

on en déduit que $K(xy)$ est symétrique et du type $\varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^{g+1}$.

Il résulte donc bien que $N(xy)$ est symétrisable à droite par $B(xy)$ et du type

$$[(\varepsilon\varepsilon')^g\varepsilon,\ (\varepsilon\varepsilon')^g\varepsilon'].$$

Nous dirons que $B(xy)$ *est le facteur composant associé de* $A(xy)$.

6. *Les classes de noyaux symétrisables.* — Les développements précédents ont montré qu'il n'existe en réalité que trois classes distinctes de noyaux symétrisables.

En effet, les classes $(\varepsilon, \varepsilon')$ et $(\varepsilon', \varepsilon)$ sont identiques, car, les facteurs composants $\int A(xs)\,N^{(i)}(sy)\,ds$ sont alternativement du type ε et ε' et les noyaux composés résultants sont du type ε' et ε.

On voit en même temps que la symétrisation à droite n'altère pas le caractère de symétrie du noyau considéré.

Il reste maintenant à établir que les trois classes restantes $(1, 1)$, $(1, -1)$ et $(-1, -1)$ sont réellement distinctes. Ceci résultera ultérieurement de leurs propriétés spéciales.

Remarquons enfin que le résultat précédent peut encore s'énoncer de la façon suivante : On peut intervertir l'ordre des ε, dans la fiche d'un noyau symétrisable.

Ces résultats suggèrent une classification systématique des noyaux, en considérant successivement les classes formées par noyaux composés de plusieurs noyaux symétriques, ou plus généralement les noyaux symétrisables de classe k, dont les facteurs composants soient des noyaux symétrisables de classes $k-1$. Les noyaux symétriques des deux premières classes seraient : 1° les noyaux symétriques proprement dits (première classe), et 2° les noyaux symétrisables que nous venons de considérer (seconde classe).

SUR DES POLYNOMES SE RATTACHANT A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y'' = 6y^2 + x$;

PAR M. PAUL APPELL.

I. On connaît les belles recherches de M. Painlevé [1] et de ses disciples [2] sur les équations différentielles à points critiques fixes. Dans l'intégration par séries de la plus simple d'entre elles,

$$y'' = 6y^2 + x, \tag{1}$$

interviennent d'une façon particulière les multiples de 5, comme l'a montré M. Boutroux [3] en étudiant deux solutions particulières remarquables.

II. M. Painlevé a étudié le premier (*loc. cit.* : *Bulletin de la Société mathématique*) une solution de la forme

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{6}(x - x_0)^3 + h(x - x_0)^4 + \ldots, \tag{2}$$

où x_0 est une constante quelconque; il a montré que le coefficient h est arbitraire. Les coefficients suivants sont des polynomes en x_0 et h, sur lesquels je voudrais présenter quelques remarques. Je me borne ici au cas où $x_0 = 0$, laissant le cas général pour une autre étude. Il s'agit alors d'une solution de la forme

$$y = \frac{1}{x^2} + x^3(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots). \tag{3}$$

La substitution dans l'équation donne les premiers coefficients, a_2 étant arbitraire ($a_2 = h$). D'une façon générale, on a la formule

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, 1900, p. 201-261, et *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1-85.

(2) Nous renverrons pour la bibliographie à l'intéressante These de M. Garnier *Sur des équations différentielles de troisième ordre* .... Paris, Gauthier-Villars; 1911.

(3) *Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXX, 1913, p. 336-340).

récurrente

$$(4) \qquad (n-2)(n+5)a_n = 6[2a_1 a_{n-5} + 2a_2 a_{n-6} + \ldots],$$

où le dernier terme entre crochets est $2a_{\frac{n-5}{2}} a_{\frac{n-3}{2}}$ quand n est impair et $a^2_{\frac{n-4}{2}}$ quand n est pair.

L'application répétée de la formule (4) fournit les coefficients successifs; nous donnons ci-dessous le Tableau des premiers d'entre entre eux, rangés en cinq colonnes verticales; dans la première figurent les coefficients a_n pour lesquels $n \equiv 1 \pmod 5$; dans la deuxième les coefficients pour lesquels $n \equiv 2 \pmod 5$, etc., dans la cinquième les coefficients pour lesquels $n \equiv 0 \pmod 5$.

$n = 5k+1$.	$n = 5k+2$.	$n = 5k+3$.	$n = 5k+4$.	$n = 5k$.
$= -\frac{1}{2.3}$	$a_2 = h$	$a_3 = 0$	$a_4 = 0$	$a_5 = 0$
$= \frac{1}{2^3.3.11}$	$a_7 = -\frac{h}{2.3.5}$	$a_8 = \frac{h^2}{13}$	$a_9 = 0$	$a_{10} = 0$
$= -\frac{1}{2^6.3^3.11}$	$a_{12} = \frac{37h}{2^2.3.5^2.11}$	$a_{13} = -\frac{2h^2}{5.11.13}$	$a_{14} = \frac{h^3}{13.19}$	$a_{15} = 0$
$= \frac{5}{2^4.3^4.7^2.11^2}$	$a_{17} = -\frac{ph}{q}$	$a_{18} = \frac{p'h^2}{q'}$	$a_{19} = -\frac{p''h^3}{q''}$	$a_{20} = \frac{3h^4}{5.13^2.19}$

Les coefficients a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25} sont de même des constantes numériques multipliées respectivement par h^0, h, h^2, h^3, h^4. En général le coefficient a_n est un polynome en h. Si

$$n \equiv p \pmod 5; \qquad p = 1, 2, 3, 4, 5,$$

le coefficient a_n contient uniquement des puissances de h de la forme h^{5k+p-1} ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$); a_n peut donc s'écrire

$$(5) \qquad a_n = h^{p-1} P_n(h^5),$$

$P_n(h^5)$ désignant un polynome contenant uniquement des puissances de h^5 et ayant tous ses coefficients du signe de $(-1)^n$.

On démontre cette proposition en montrant que, si la propriété est vraie pour a_{n-5}, a_{n-10}, a_{n-15}, ..., elle l'est aussi pour a_n. Comme elle est vraie, d'après le Tableau, pour les premiers coefficients, elle le sera alors pour tous.

Dans la formule récurrente (4), en supposant $n \equiv p \pmod 5$, on voit que tous les termes du second membre $a_1 a_{n-5}$, $a_2 a_{n-6}$, ... sont de la forme $h^{p-1} P(h^5)$ d'après la formule (5) supposée vraie pour a_1 et a_{n-5}, a_2 et a_{n-6}, a_3 et a_{n-7}, ...; cette forme est donc vraie pour a_n.

Soit ω une racine cinquième de l'unité : si l'on remplace x par ωx et h par ωh, y est remplacée par $\omega^3 y$. On peut vérifier directement, sur l'équation différentielle, que le changement de x en ωx, et de y en $\omega^3 y$ n'altère pas l'équation.

Si l'on donne à h la valeur *zéro*, $h = 0$, le développement devient (*voir* Boutroux, *loc. cit.*)

$$Y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{264} x^8 - \frac{1}{19008} x^{13} + \frac{5}{7683984} x^{18} + \ldots,$$

où ne figurent que des puissances de x de la forme $5k - 2$.

On peut aussi calculer directement les coefficients de Y, en cherchant une solution de la forme

$$Y = \frac{1}{x^2} + x^3 \varphi(x^5);$$

puis les premiers coefficients a_n pour lesquels $n = 5k + 2$, en remarquant que la fonction $Y_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial h}\right)_0$, détermination de $\frac{\partial y}{\partial h}$ pour $h = 0$, vérifie l'équation

$$Y_1'' = 12 Y Y_1.$$

Le cas où x_0 est différent de zéro, se traite de la même façon en faisant d'abord $x - x_0 = t$, ce qui donne

$$y'' = 6y^2 + t + x_0,$$

les dérivées étant prises par rapport à t.

III. La seconde équation de M. Painlevé

$$y'' = 2y^3 + xy + \alpha \tag{6}$$

conduit à des résultats de même nature, le nombre 3 jouant un rôle analogue à celui du nombre 5 pour l'équation (1). C'est ce qu'on voit *a priori* en remarquant que, si ω est une racine cubique de l'unité, l'équation (6) ne change pas si l'on remplace x par ωx et y par $\omega^2 y$.

On voit, en particulier, que l'équation (6) admet une solution de la forme

$$y = \frac{1}{x} + x^2 F(x^3),$$

$F(x^3)$ étant une série entière en x^3 :

$$F(x^3) = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \ldots.$$

Un calcul facile donne, en substituant dans (6) et réduisant, la relation

$$\begin{aligned} &9x^6 F''(x^3) + 18x^3 F'(x^3) \\ &\quad = 4F(x^3) + 6x^3 F^2(x^3) + 2x^6 F^3(x^3) + x^3 F(x^3) + 1 + \alpha, \end{aligned}$$

qui, en posant $x^3 = z$, permet de calculer les coefficients de la série $F(z)$.

SUR LES CHEMINS DE DÉTERMINATION DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. G. VALIRON.

On sait qu'étant donnés une fonction entière $f(z)$ et un chemin C qui s'éloigne indéfiniment, les valeurs de $f(z)$ sur la courbe C n'ont pas en général de limite lorsque z croît indéfiniment. Mais il peut exister des chemins C sur lesquels $f(z)$ tend vers une limite a, je les appellerai *chemins de détermination a de* $f(z)$; je dirai aussi que a est une *valeur asymptotique* ou *valeur limite* de $f(z)$. En particulier, M. Iversen a démontré dans sa Thèse qu'il existe toujours des chemins de détermination infinie [1].

L'étude des chemins de détermination finie joue un rôle important dans la théorie des fonctions inverses des fonctions entières; la connaissance de l'ensemble des valeurs limites de la fonction s'impose même dès le début. Le théorème de M. Wiman fournit un premier renseignement : pour les fonctions d'ordre inférieur

---

[1] *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors, 1914.

à $\frac{1}{2}$ il n'existe pas de valeur asymptotique finie [1]. Pour les autres fonctions d'ordre fini, M. Denjoy a énoncé le résultat suivant :

Théorème I. — *Le nombre des valeurs limites d'une fonction d'ordre ρ est au plus égal à 2ρ* [2].

Cette importante proposition serait rendue vraisemblable, ajoute M. Denjoy, si l'on établissait ce deuxième théorème :

Théorème II. — *Considérons une courbe* C *s'éloignant indéfiniment, faisons-la tourner d'un angle égal à $\frac{\pi}{\rho+\alpha}$, α étant un nombre positif quelconque, et soit* C′ *la courbe obtenue. Désignons par* D *le domaine compris entre* C *et* C′ *et intérieur à l'aire* D_1 *balayée par* C *pendant la rotation. Si une fonction d'ordre ρ admet des chemins de détermination intérieurs à* D, *les valeurs limites sur ces chemins sont les mêmes.*

C'est ce deuxième théorème que je me propose de démontrer dans ce qui suit [3] par une application fort simple d'un théorème général de MM. Phragmèn et Lindelöf [4].

Il convient de faire tout d'abord une remarque presque évidente, mais importante, sur la nature des chemins de détermination finie. On sait que la dérivée d'une fonction entière d'ordre ρ est aussi d'ordre ρ; le logarithme du module de cette dérivée est donc, pour $|z| = r$ et à partir d'une certaine valeur de r, inférieur à $r^{\rho+\beta}$, β étant un nombre positif quelconque. Il résulte de là que, si l'on fait sur un chemin de détermination une transformation z, z' avec $\log|z - z'| < -r^{\rho+\beta}$, β étant positif, on obtient

---

(1) *Voir* Wiman, *Sur un théorème de M. Hadamard* (*Arkiv for Matematik*, t. II, n° 19).

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 juillet 1907.

(3) M. Denjoy a démontré ce théorème lorsque la courbe C est une droite ou une spirale logarithmique. *Voir* également mon Mémoire *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, p. 252).

(4) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1907).

encore un chemin de même détermination. En particulier, on peut considérer que, dans l'énoncé du théorème II, les chemins de détermination et les contours C et C′ sont des lignes polygonales.

Je rappellerai également l'énoncé du théorème de MM. Phragmèn et Lindelöf sous la forme suivante qui sera seule utile dans la suite :

Considérons une fonction $f(z)$ analytique et régulière dans un domaine simplement connexe D et sur le contour C de ce domaine, sauf au point A du contour. Supposons que le module de $f(z)$ soit inférieur ou égal à un nombre fixe E en tout point du contour autre que A, et admettons qu'il existe une fonction $\omega(z)$ régulière et différente de zéro à l'intérieur du domaine D, régulière et de module moindre que *un* sur la courbe C, sauf peut-être en A, et telle que, si petit que soit le nombre ε, on puisse trouver un cercle de centre A dans lequel on a

$$|f(z)[\omega(z)]^{+\varepsilon}| \leqq E.$$

Dans ces conditions, le module de $f(z)$ reste inférieur à E en tout point intérieur à la courbe C.

J'aurai enfin à m'appuyer sur une propriété de certaines fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ dont la démonstration est aisée [1]. Soit la fonction

$$F(Z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - Z n^{-\frac{1}{\rho_1}} e^{i\omega_n}\right),$$

dans laquelle ρ_1 est inférieur à $\frac{1}{2}$ et ω_n quelconque; pour toute valeur de z extérieure à un cercle de rayon $R(\gamma)$ indépendant des nombres ω_n et à l'extérieur des cercles Γ_n définis par les égalités

$$\log\left|Z - n^{\frac{1}{\rho_1}} e^{-i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1}$$

$F(Z)$ vérifie les inégalités

$$\frac{\pi\cos\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1}(1-\gamma)R^{\rho_1} < \log|F(Z)| < \frac{\pi}{\sin\pi\rho_1}(1+\gamma)R^{\rho_1} \qquad (|Z| = R),$$

dans lesquelles γ est un nombre positif inférieur à *un*.

---

[1] *Voir* par exemple mon Mémoire déjà cité, p. 231.

Ces propositions étant admises nous pourrons démontrer le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* D *un domaine défini comme au théorème II; si la fonction* $f(z)$, *d'ordre* ρ, *admet deux chemins de détermination finie intérieurs au domaine, elle reste bornée entre ces chemins.*

Supposons d'abord que la courbe C coupe en un seul point tout cercle ayant pour centre l'origine. Considérons les courbes C et C′ comme des coupures dans le plan des z et faisons correspondre à z intérieur au domaine D le point Z défini par l'égalité $Z = z^{2(\rho+\alpha)}$. Au domaine D correspond un domaine Δ constitué par le plan des Z muni d'une coupure Γ transformée des courbes C et C′. Soit F(Z) la fonction entière d'ordre $\rho_1 = \frac{2\rho+\alpha}{4(\rho+\alpha)}$ définie comme il a été dit ci-dessus et dont les zéros sont situés sur la courbe Γ. Dans tout le domaine, exception faite des points intérieurs aux cercles d'équations

$$|Z| = R \qquad \text{et} \qquad \log\left|Z - n^{\frac{1}{\rho_1}} e^{-i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1},$$

on aura l'égalité

$$\log|F(Z)| = hR^{\rho_1} \qquad (h > M > 0).$$

Désignons par $G(z)$ la transformée de $F(Z)$ par la transformation qui fait correspondre le domaine D à Δ, dans tout le domaine D nous aurons l'égalité

$$\log|G(z)| = hr^{2\rho_1(\rho+\alpha)} = hr^{\rho+\frac{\alpha}{2}},$$

sauf à l'intérieur du cercle $|z| = R^{\frac{1}{2(\rho+\alpha)}}$ et à l'intérieur des courbes ayant pour équations

$$\log\left|z^{2(\rho+\alpha)} - n^{\frac{4(\rho+\alpha)}{2\rho+\alpha}} e^{i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1}.$$

Ces courbes sont entièrement intérieures aux cercles ayant pour centres les points de C et C′ de modules $r_n = n^{\frac{1}{\rho+\frac{\alpha}{2}}}$ et pour loga-

rithmes des rayons

$$-\lambda n(\log n)^{-1} = -\lambda' r_n^{\rho+\frac{\alpha}{2}}(\log r_n)^{-1}.$$

Soit D′ le domaine intérieur à D et extérieur à tous ces cercles. D'après une remarque faite plus haut, à tout chemin de détermination intérieur à D en correspond un autre, de même détermination, intérieur à D′, et sur tout chemin compris entre eux, $f(z)$ a la même valeur limite. Pour établir le lemme on peut donc supposer que les deux chemins de détermination sont intérieurs à D′, et la démonstration résulte alors immédiatement de l'application du théorème de MM. Lindelöf et Phragmèn dans lequel on prendra

$$\omega(z) = [G(z)]^{-1}.$$

J'ai supposé, pour simplifier l'exposé, que la courbe C coupe en un seul point tout cercle $|z| = r$. Il est clair que rien n'est changé si l'on suppose que la propriété n'a lieu qu'à partir d'une certaine valeur de r. Mais il peut arriver que, quel que soit r, cette propriété ne soit pas vérifiée. Dans ce cas, on considérera l'aire D_1 balayée par la courbe C et sa transformée Δ_1. Δ_1 sera limitée par deux courbes Γ_1 et Γ'_1 correspondant aux frontières C_1 et C'_1 de D_1 et tracées sur la surface de Riemann définie par la transformation (Γ_1 étant considérée comme coupure). On prendra les zéros de $F(Z)$ sur Γ_1 par exemple, avec cette restriction que, si pour une valeur $|Z| = R$ on obtient un arc de Γ_1, on exclut les points intérieurs à cet arc. Dans ces conditions, la fonction $G(z)$ pourra avoir des zéros intérieurs au domaine D_1, mais elle n'en aura pas à l'intérieur de D, et par suite tout ce qui précède s'applique. Le lemme est donc complètement démontré.

Pour passer à la démonstration du théorème II, il suffit alors d'appliquer un mode de raisonnement indiqué par M. Lindelöf [1]. Nous devons démontrer que, pour deux chemins de détermination E et E′ intérieurs à D, la valeur limite est la même. Nous supposerons que le domaine D est extérieur à un cercle concentrique à l'origine, hypothèse légitime d'après ce qui pré-

---

(1) *Voir* la thèse de M. Iversen et le Mémoire de M. Lindelöf [*Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions...* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, n° 7)].

cède. Faisons une inversion par rapport à ce cercle, nous obtiendrons un domaine d dont le contour est formé d'une infinité d'arcs de cercles, et dans ce domaine existent deux chemins e et e', tendant vers l'origine, sur lesquels la transformée $\varphi(z)$ de $f(z)$ a des limites; entre ces chemins $\varphi(z)$ est bornée.

Faisons la représentation conforme du domaine d sur un cercle de rayon *un*, le point $z = 0$ de d correspondant au point $z' = 1$ du cercle. Étant donnée la nature de la frontière du domaine d, aux chemins e et e' correspondent deux chemins γ et γ' aboutissant au point $z' = 1$ [1], sur ces chemins la transformée $\psi(z')$ de $\varphi(z)$ tend respectivement vers des limites lorsque z' tend vers *un*, et elle est bornée entre eux.

Tout revient donc à démontrer que les limites de $\psi(z')$ sur γ et γ' sont les mêmes. Nous allons montrer qu'elles ne peuvent être différentes; supposons qu'elles le soient et désignons-les par μ et μ'. La fonction

$$\theta(z') = \left[\psi(z') - \frac{\mu + \mu'}{2}\right]^2 - \left(\frac{\mu - \mu'}{2}\right)^2$$

a pour limite zéro sur γ et γ' et est bornée entre ces courbes. On déduit de là, comme nous le verrons ci-dessous, que $\theta(z')$ tend uniformément vers zéro lorsque z' tend vers *un* dans le domaine fermé limité par γ et γ' et intérieur au cercle (circonférence comprise). Il en résultera que, dans tout ce domaine, et par suite sur γ et γ', la fonction $\psi(z')$ tend vers l'un des deux nombres μ ou μ', ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite; cette hypothèse est donc inadmissible et le théorème II est démontré.

Il reste à démontrer la propriété admise ci-dessus, savoir que, $\theta(z')$ tendant vers zéro sur γ et γ' et étant bornée entre ces courbes, cette fonction tend uniformément vers zéro dans le domaine fermé limité par γ et γ'. J'appliquerai ici encore le théorème de MM. Lindelöff et Phragmèn.

Désignons par M la borne de $|\theta(z')|$ lorsque z' est compris entre γ et γ'; ε étant arbitrairement petit, il existe un cercle d_ε

---

(1) *Voir* Carathéodory, *Ueber die gegenseitige Beziehung der Rände bei der konformen Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, B. 73, 1913).

de centre $z' = 1$ tel que, sur les portions de γ et γ' intérieures à ce cercle, $|\theta(z')|$ est inférieur à ε. Considérons alors la fonction

$$\theta(z')\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[1-(z'-1)M\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d_\varepsilon^{-1}\right]^{-1}$$

pour les points du cercle d_ε compris entre γ et γ' le module de cette fonction est inférieur à *un*, et sur le reste du contour du domaine limité par ce cercle et par les courbes γ et γ', il est inférieur à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, donc à *un*, enfin il est borné dans ce domaine. On peut donc appliquer le théorème de Lindelöf et Phragmèn en prenant $\omega(z') = z' - 1$, et l'on voit que, dans tout le domaine fermé limité par γ, γ' et le cercle d_ε, on a

$$|\theta(z')| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[1-(z'-1)M\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d_\varepsilon^{-1}\right];$$

en particulier, pour les points de ce domaine intérieurs au cercle de centre $z' = 1$ et de rayon $d_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}}M^{-1}$, le module de $\theta(z')$ reste inférieur à $2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, ce qui montre que $\theta(z')$ converge uniformément vers zéro lorsque z' tend vers *un* (¹).

On remarquera que, dans la démonstration précédente, la seule propriété du cercle qui soit intervenue est l'existence, à l'extérieur du cercle, d'une région dont tout point est à une distance du cercle supérieur à d_ε. On voit aisément qu'on peut appliquer directement la démonstration au domaine D lui-même lorsqu'il existe, à l'extérieur de ce domaine, une suite de cercles C_n dont les centres A_n ont pour limite l'infini et dont les rayons sont supérieurs à $k \times \overline{OA_n}$, k étant fixe. C'est ce qui a lieu lorsque la courbe C a une équation polaire de la forme $r = f(\varphi)$, la dérivée logarithmique de $f(\varphi)$ restant supérieure à un nombre fixe (²).

Il résulte de là que le théorème II se démontrerait sans avoir à faire appel aux propriétés de la représentation conforme, si l'on établissait la propriété suivante qui constitue une généralisation du théorème de M. Wiman : pour toute fonction entière d'ordre

---

(¹) M. Lindelöf a donné dans le Mémoire cité plus haut une démonstration de cette propriété basée sur l'emploi de l'intégrale de Poisson.

(²) *Voir* mon Mémoire déjà cité, p. 257.

fini ρ, il existe une infinité de courbes fermées sans points doubles Γ_n sur lesquelles le module de la fonction dépasse un nombre donné quelconque M, chaque courbe Γ_n enfermant à son intérieur un cercle de centre A_n et de rayon $k(\rho)\overline{OA_n}$.

En terminant, je signalerai encore une propriété générale de forme des chemins de détermination, qui se déduit des théorèmes de M. Boutroux sur la dérivée logarithmique [1].

Considérons une spirale d'équation $r = f(\varphi)$, $f(\varphi)$ étant une fonction croissante de φ, si la fonction

$$(1) \qquad \frac{f(\varphi + 2\pi) - f(\varphi)}{f(\varphi)} \log f(\varphi)$$

tend vers zéro lorsque φ croît indéfiniment, une fonction entière d'ordre fini non entier ne peut rester bornée sur cette spirale.

En effet, étant donnée une fonction $f(z)$, d'ordre non entier, il existe une fonction $\psi(r)$ satisfaisant à la condition de croissance

$$\lim_{r=\infty} \frac{\psi(r')}{\psi(r)} = 1 \qquad \text{si} \qquad \lim_{r=\infty} \frac{r'}{r} = 1,$$

et telle qu'on a :

1° Sur une infinité de droites issues de l'origine

$$(2) \qquad \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| < A \frac{\psi(r) \log r}{r};$$

2° Dans une infinité de couronnes dont le rayon moyen croît indéfiniment

$$(3) \qquad \log M(r) > B\psi(r),$$

$M(r)$ désignant le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$.

Supposons que sur la spirale $f(z)$ reste borné et considérons une droite D sur laquelle on a l'inégalité (2), et un cercle de rayon r sur lequel on a l'égalité (3). Soient A_1 et A_2 les points d'intersection de la droite D et de la portion de la spirale extérieure à C qui sont les plus proches de l'origine; dans la région limitée par

---

[1] Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta mathematica*, 1903).

la spire qui va de A_1 à A_2 et par le segment de droite A_1A_2, le maximum du module de $f(z)$ a lieu sur le contour et est supérieur à $e^{B\psi(r)}$ [inégalité (3)]. Ce maximum est donc atteint sur le segment de droite, mais il résulte alors de l'inégalité (2) et de la condition (1) que $f(z)$ sera supérieur à $e^{B\psi(r)}$ aux points A_1 et A_2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. La proposition est donc établie.

Il semble probable que la propriété précédente peut s'étendre et qu'on peut supprimer, dans (1), le terme en $\log f(\varphi)$; elle se démontre d'ailleurs facilement dans le cas de la spirale logarithmique, mais par une méthode qui ne semble pas pouvoir être généralisée [1].

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Lindelöf, *loc. cit.*, p. 388, et la Note de M. Denjoy déjà citée.

FIN DU TOME XLV.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1908.)

Pages.

[H3c] **Appell** (P.). — Sur des polynomes se rattachant à l'équation différentielle $y'' = 6y^2 + x$ 150

[Q1a] **Cartan** (E.). — La déformation des hypersurfaces dans l'espace à $n \geqq 5$ dimensions 57

[D2b] **Cotton** (E.). — Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet 121

[P'6d] **Fouché** (M.). — Sur la transformation de Lie 37

[J5a] **Fréchet** (M.). — Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits 1

[R8c] **Globa-Mikhaïlenko** (B.). — Sur le mouvement d'une bille de billard 15

[H11a] **Lalesco** (T.). — Les classes de noyaux symétrisables 144

[I25b] **Lebesgue** (H.). — Sur certaines démonstrations d'existence 132

[I19b] **Maillet** (E.). — Sur l'équation indéterminée $a^m + b^m = c^m$ en nombres entiers différents de zéro, quand m est fractionnaire et sur une équation analogue plus générale 26

[I25b] **Sierpinski** (W.). — Démonstration élémentaire du théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre 125

[O'5c] **Turrière** (E.). — Sur la détermination des surfaces par une relation entre des segments de normales 8

[D4a] **Valiron** (G.). — Sur les chemins de détermination des fonctions entières 153

[D1b] **Vallée Poussin** (Ch. de la). — Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle 53

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLV.

1.a.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58034 Quai des Grands-Augustins, 55.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1917.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
58698 Quai des Grands-Augustins, 55.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1917.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55

1918

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

N° 1.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1917 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. DEMOULIN. DERUYTS. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. NEUBERG. PAINLEVÉ. PICARD. VALLÉE POUSSIN (DE LA). VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. GUICHARD.
Vice-Présidents.....	DRACH. FONTENÉ. LEBESGUE. MAILLET.
Secrétaires.....	P. LÉVY. MONTEL.
Vice-Secrétaires.....	FATOU. TRESSE.
Archiviste.....	CAHEN.
Trésorier.....	SERVANT.
Membres du Conseil (2)	BLUTEL, 1919. BOULANGER, 1919. BRICARD, 1918. CARTAN, 1919. CARVALLO, 1920. FOUCHÉ, 1920. GOURSAT, 1920. GRÉVY, 1918. KOENIGS, 1918. OCAGNE (D'), 1918. THYBAUT, 1920. VESSIOT, 1918.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

En raison de l'état de guerre actuel, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé de suspendre les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous :

Date de l'admission.

1872 ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).

1900. ADHÉMAR (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. ANDOYER, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).

1894. ANDRADE, professeur à la Faculte des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.

1879. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7e).

1910. ARCHIBALD (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).

1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5e).

1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.

1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).

1917. BARRAU (J.-A.), professeur à l'Université, à Groningen (Hollande).

1905. BARRÉ, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5e).

1891. BERTRAND DE FONTVIOLANT, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17e). S. P. (1).

1910. BERTRAND (G.), rue de la Vieille-Église, 2, à Versailles.

1913. BILIMOVITCH, privat-dozent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1888. BIOCHE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e). S. P.

1891. BLUTEL, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).

1902. BOBERIL (comte Roger DE), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.

1907. BOITEL DE DIENVAL, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.

1892. BONAPARTE (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).

1895. BOREL (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e). S. P.

1913. BORTOLOTTI (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne (Italie).

1909. BOULAD (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).

1896. BOULANGER, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Louis-Hervé, 15, à Versailles (Seine-et-Oise).

1913. BOULIGAND, docteur ès sciences, professeur au lycée de Rennes (Ile-et-Vilaine).

1896. BOURGET (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

1903. BOUTIN, rue Lavieuville, 26, à Paris (18e).

1904. BOUTROUX (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.

1900. BREITLING, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14e).

---

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels

Date de l'admission.

1911. **BRATU**, professeur, stradela Goliei, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. **BROWNE**, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. **CAHEN**, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1893. **CALDARERA**, ancien professeur à l'Université de Palerme, via Umberto I, 65, à Catania (Italie).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17e).
1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5e). S. P.
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
1896. **CHARVE**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.
1911. **CHATELET**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1913. **COBLYN**, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16e).
1915. **CONSTANTINIDÈS**, professeur au gymnase de Phodos (Grèce).
1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1914. **CRELIER**, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27 *bis*, à Montpellier.
1901. **DELASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. **DELVILLE** (L.), ingénieur aux forges et aciéries de Huta-Bankowa, à Dombrowa (Pologne, Russie).
1885 **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. **DENJOY**, professeur à l'Université d'Utrecht (Hollande).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1914. **DONDER** (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5e).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).

Date de l'admission.

1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
190? **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaya, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. **ESCLANGON**, astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1912. **EISENHARDT** (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. **ELCUS**, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8e). S. P.
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, professeur de mathématiques et d'astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur, galerie Sarlande, 1, à Alger.
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-parnasse, 172, à Paris (14e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
189?. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
187?. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).
1903. **FORD** (Walter B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).
187?. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, ancien président de la Société mathématique suisse, ancien professeur à l'Université de Bâle, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9III, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Emile-Deschanel, 14, à Paris (7e).
1900. **GALDEANO** (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, à Étoile (Drôme).
187?. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).
1908. **GARNIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1911. **GAU**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).

Date de l'admission.

1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1913. **GIRAUD**, agrégé de mathématiques, rue Le Verrier, 11, à Paris (6e).
1917. **GLOBA-MIKHAÏLENKO**, docteur ès sciences, avenue des Gobelins, 10 *bis*, à Paris (5e).
1913. **GODEAUX**, rue Victor-Cousin, 6, à Paris.
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).
1914. **GOLOUBEFF** (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).
1907. **GOT** (Th.), docteur ès sciences, section technique du génie, rue de Bellechasse, 39, à Paris (7e).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 *bis*, à Paris (5e). S. P.
1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris (8e).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Fontaine, 19, à Paris (16e).
1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, Hicks Avenue, 304, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17e). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Bonaparte, 30, à Paris (6e).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).
1896. **JACQUET** (E.), professeur, au lycée Henri IV, rue Notre-Dame-des-Champs, 76, à Paris (6e).
1914. **JAGER** (F.), licencié ès sciences, avenue de la Grande-Armée, 69, à Paris (16e).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Amicisvej, 16, à Copenhague V. (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7e). S. P.

Date de l'admission.

1916. **KAMPÉ DE FÉRIET**, docteur ès sciences, Grand Hôtel de Bretagne, à Lorient (Morbihan).
1913. **KASNER** (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14e).
1913. **KIVELIOVITCH**, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5e).
1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14e).
1913. **KOSTITZIN** (V.), avenue Villemin, 32, à Paris.
1907. **KRYLOFF**, ingénieur des Mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17e).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. **LANCELIN**, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14e).
1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Trinité, 10, à Toulouse.
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14e).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11e).
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Meissonier, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6e).
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. **LESGOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6e).
1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6e).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16e). S. P.
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).
1912. **LOVETT** (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7e).
1913. **LUSIN**, professeur adjoint à l'Université de Moscou (Russie).
1895. **MAILLET**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée de Marseille.
1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue Frédéric-Passy, 15, à Neuilly (Seine).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).

Date de l'admission.

1884. **MARTIN** (Artemas), Columbia Street 1352, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7e). S. P.
1902. **MERLIN** (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14e).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. **MONTEL**, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15e).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille, rue Cassette, 32, à Paris (6e).
1911. **MOORE** (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.
1905. **OUIVET**, rue de Seine, 51, à Paris (6e).
1873. **OVIDIO** (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Sebastiano Valfré, 14, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Dijon.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).
1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e). S. P.
1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.
1917. **PASQUIER** (DU), professeur à l'Université, rue de la Côte, 106A, à Neufchâtel (Suisse).
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1914. **PÉRÈS**, agrégé de l'Université, professeur au lycée de Montpellier.
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue de la Convention, 116, à Paris (15e).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Pétrograde (Russie).
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Domenico Maggiore, 9, à Naples (Italie).
1905. **PFEIFFER**, professeur à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

Date de l'admission.

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1913. **PODTIAGUINE** (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).

1914. **POWALO-SCHWEIKOWSKI**, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 *bis*, à Paris (14e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.

1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.

1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).

1916. **ROBINSON** (L.-B), 22nd street 306 E, à Baltimore (Maryland, États-Unis).

1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1896. **ROIGIER**, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e.)

1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14e).

1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Thorvaldsinsi, 193, à Copenhague (Danemark).

1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).

1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7e).

1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Pétrograde (Russie). S. P.

1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).

1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).

1912. **SIRE**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.

1916. **SOULA**, agrégé de l'Université, 40e d'infanterie, S. P. 130.

1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.

1909. **SPEISER** (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).

1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).

1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).

1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).

Date de l'admission.

1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14e).

1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).

1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.

1913. **TAMARKINE**, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Pétrograde (Russie).

1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5e).

1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).

1913. **TINO** (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).

1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8e).

1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).

1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).

1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Matignon, 10, à Paris (8e).

1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, boulevard Saint-Michel, 21, à Paris (5e).

1913. **VALIRON**, docteur ès sciences, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).

1893. **VALLÉE POUSSIN** (Ch.-J. de la), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université de Louvain (Belgique), avenue Dorian, 2, à Paris (11e).

1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macau, 16, à Bruxelles.

1905. **VAN VLECK**, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).

1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).

1913. **VEBLEN** (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).

1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue du Petit-Chambord, 44, à Bourg-la-Reine (Seine).

1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.

1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.

1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).

1880. **WALCKENAER**, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).

1879. **WEILL**, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16e).

1906. **WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).

1911. **WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16e).

1909. **WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).

1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16e).

1912. **YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Rodlinde, Epinettes, 22, à Lausanne (Suisse).

1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'Artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Pétrograde (Russie).

1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).

Date de l'admission.

1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).

1898. **ZIWET**, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1909. **ZORETTI**, professeur de mécanique à la Faculte des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1916 : MM. DUNCAN, LÉAUTÉ.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET. CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	KŒNIGS.
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.
1913	COSSERAT (F.).
1914	VESSIOT.
1915	CARTAN.
1916	FOUCHÉ.
1917	GUICHARD.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin.....	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne.....	Academie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.....	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague.....	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague.....	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N^lle-Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig.....	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathematique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pétrograde	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis.
Rennes	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie
Rome	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Sophia	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Archiv for Mathematik.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram)	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 14 JANVIER 1917.

Présidence de M. Fouché.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société. M. Globa-Mikaïenko, présenté par MM. Vessiot et Montel, et M. Barrau, présenté par MM. Appell et Bioche.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1917.

Présidence de M. Fouché.

SÉANCE DU 11 MARS 1917.

Présidence de M. Fouché.

Communication :

M. Fouché : *Sur une généralisation des propriétés de la droite de Simson.*

SÉANCE DU 22 AVRIL 1917.

Présidence de M. Guichard.

Communications :

M. Kiveliovitchi : *Sur les points singuliers du problème des trois corps.*

M. Fouché : *Sur les quadrilatères de Poncelet inscriptibles dans un cercle ou dont les côtés opposés sont rectangulaires.*

SÉANCE DU 13 MAI 1917.

Présidence de M. Fouché.

Communication :

M. Fouché : *Sur les systèmes de coniques admettant des triangles ou des quadrilatères inscrits à la première et circonscrits à la seconde et d'autres inscrits à la seconde et circonscrits à la première.*

SÉANCE DU 10 JUIN 1917.

Présidence de M. Cahen.

Communication :

M. Fouché : *Sur les cyclides du troisième ordre.*

SÉANCE DU 11 NOVEMBRE 1917.

Présidence de M. Guichard.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. du Pasquier, présentée par MM. Hadamard et Vessiot.

Communication :

M. Bioche : *Sur les plans tangents aux surfaces algébriques.*

1. Si une surface algébrique contient une droite D, le plan tangent en un point de cette droite a, lorsque le point de contact décrit D, une loi de variation facile à établir.

L'équation de la surface, quand on prend la droite D pour axe des z, peut s'écrire

$$Y\varphi(X, Y, Z, T) = X f(X, Y, Z, T),$$

φ et f étant des polynomes de degré $n-1$. Le plan tangent en un point $(0, 0, z, t)$ a pour équation

$$Y\varphi(0, 0, z, t) = X f(0, 0, z, t).$$

La condition nécessaire est suffisante pour que la surface ait un point double sur OZ est que les équations

$$\varphi(0, 0, z, t) = 0, \qquad f(0, 0, z, t) = 0$$

soient vérifiées en même temps, ou, autrement dit, que les polynomes qui figurent aux premiers membres aient un facteur commun.

D'autre part, le plan P, ayant pour équation

$$Y - mX = 0,$$

coupe cette surface suivant OZ et suivant une courbe d'ordre $n-1$. Celle-ci coupe Oz aux points donnés par

$$m f(0, 0, z, t) - f(0, 0, z, t) = 0,$$

et ces points sont des points de contact du plan tangent à la surface, qui varient avec m, si ce ne sont pas des points multiples.

En particulier, on voit que, sur une surface cubique, les couples de points où un plan mené par une droite D ne contenant pas de points doubles est tangent à la surface, sont les couples d'une involution.

2. Si les polynomes φ et f ont un facteur commun d'ordre p la courbe d'ordre $n-1$, située dans le plan P, coupe Oz en p points fixes; il y a sur Oz p points doubles, distincts ou confondus, et m s'exprime par une fraction dont les termes sont de degré $n-p-1$ en z et t.

Il est facile de voir qu'un point multiple d'ordre k correspond à un facteur commun d'ordre $k-1$, donc compte pour $k-1$ points doubles. Mais la coïncidence de $k-1$ points doubles ne produit pas toujours un point multiple d'ordre k.

Si $p = n-1$, comme cela arrive pour les cônes, m est constant. Ce fait se produit pour les droites des surfaces cubiques qui contiennent deux points doubles, ou pour les droites des surfaces desmiques du quatrième ordre, ces droites contenant trois points doubles.

Si $p = n-2$, ce qui arrive pour les surfaces gauches, la relation entre m et $\frac{z}{t}$ est homographique et l'on retrouve la loi de Chasles. Celle-ci s'applique donc au cas des droites des surfaces cubiques qui contiennent un point double.

3. Si l'on prend pour plan $X = 0$ la position limite que prend un plan passant par Oz lorsque son point de contact s'éloigne indéfiniment, t est en facteur dans $\varphi(0, 0, z, t)$; ce polynome ne contient donc plus z qu'au degré $n - p - 2$, après suppression des facteurs communs à φ et f. Si le plan tangent n'est pas le même en tous les points de Oz, on peut faire un changement d'origine en posant

$$z = z_1 + r,$$

z_1 étant le z d'un point de contact de $Y = 0$. Alors m s'exprime en fonction de r par une fraction rationnelle qu'on peut écrire

$$m = r\frac{f(r)}{\varphi(r)},$$

f et φ étant des polynomes de degré $n - p - 2$. Pour les surfaces réglées, $\frac{f(r)}{\varphi(r)}$ se réduit à une constante, *paramètre de distribution* des plans tangents. La loi obtenue s'applique aux surfaces réglées non algébriques parce que la loi est la même pour une pareille surface et pour la quadrique passant par trois génératrices infiniment voisines. Mais la loi générale ne s'applique pas aux surfaces non algébriques; par exemple, si l'on considère la surface

$$Y = Xe^z,$$

le coefficient angulaire du plan tangent en un point de Oz, qui est une directrice de la surface et non une génératrice, est donné par

$$m = e^z.$$

SÉANCE DU 9 DÉCEMBRE 1917.

Présidence de M. Maillet.

Communications :

M. Maillet : *Sur l'équation indéterminée $a^m + b^m = c^m$.*

L'auteur résume une Note sur l'équation indéterminée $a^m + b^m = c^m$ en nombres entiers naturels positifs a, b, c, où m est fractionnaire. Cette équation est vraisemblablement équivalente à l'équation $a^n + b^n = c^n$ (n entier positif) qui fait l'objet du théorème de Fermat.

L'auteur a pu l'établir dans divers cas, par exemple quand $m > 1$. La démonstration utilise les débuts de la théorie des nombres algébriques sans intervention des idéaux. Il y a un théorème analogue pour les équations $a^{m_1} + b^{m_2} = c^{m_3}$ (m_1, m_2, m_3 rationnels > 0), a, b, c étant premiers entre eux deux à deux [1].

M. Laisant : *Sur les triangles héroniens.*

Soient M N P Q quatre termes consécutifs d'une suite de Fibonacci, où $P = M + N$, $Q = N + P$.

Si l'on pose $a = MQ$, $b = 2TN$, $c = P^2 + N^2 = PQ - MN$, a, b, c sont les trois côtés d'un triangle rectangle, qui seront entiers si les nombres M, N le sont.

Si M est impair et premier avec N, le triangle sera primitif, c'est-à-dire que a, b, c seront premiers entre eux.

En appelant r le rayon du cercle inscrit et p le demi-périmètre du triangle, on a les relations

$$r = MN, \qquad p = PQ, \qquad p - a = NQ,$$
$$p - c = MP, \qquad p - c = MN = r.$$

On peut écrire aussi les longueurs des côtés sous la forme suivante :

$$a = 2MN + M^2, \qquad b = 2MN + 2N^2, \qquad c = 2MN + M^2 + 2N^2,$$

$M^2 = \beta = a - 2r$ et $2N^2 = \alpha = b - 2r$ sont ce qu'on peut appeler les deux *pointes* du triangle rectangle, et l'on voit que le produit des deux pointes est $2r^2$.

On a aussi

$$p - a = r + \alpha, \qquad p - b = r + \beta.$$

Ces considérations sont pour ainsi dire évidentes géométriquement. Dans un triangle quelconque, on a

$$a = 2r + \beta + \gamma, \qquad b = 2r + \gamma + \alpha, \qquad c = 2r + \alpha + \beta;$$
$$p - a = r + \alpha, \qquad p - b = r + \beta, \qquad p - c = r + \gamma.$$

Si l'angle C est obtus, la pointe γ est négative; ce qui caractérise un triangle rectangle en C, c'est la condition $\gamma = 0$.

La suite M N P Q ayant donné le triangle de côtés a, b, c, si l'on pose

$$M' = Q, \qquad N' = P, \qquad P' = Q + P, \qquad Q' = Q + 2P,$$

---

[1] *Voir* la Note dans le *Bulletin*, t. XLV, 1917, p. 26-36.

on obtiendra un triangle A′ B′ C′ dans lequel $a' - b' = b - a$. Cette remarque permet de former une suite indéfinie de triangles dans lesquels la différence des deux côtés de l'angle droit aura même valeur absolue. En supposant $a - b = \pm 1$, le tableau ci-dessous permet de s'en assurer. Il est utile de remarquer que $a - b$ est toujours de la forme $\pm (M^2 - 2N^2)$

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
1	1	2	3	3	4	5
3	2	5	7	21	30	29
7	5	12	17	119	120	169
17	12	29	41	697	696	985
41	29	70	99	4059	4060	5741

On peut remarquer que les M, N, P, Q successifs forment des séries récurrentes dont l'échelle commune est

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$$

et qu'il en est de même pour les a, b, c, avec l'échelle

$$v_{n+3} = 5v_{n+2} + 5v_{n+1} - v_n.$$

20

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

État de la Société au début de 1917 1

Liste des périodiques reçus 12

Comptes rendus des séances 14

Communications : MM. *Bioche :* Sur les plans tangents aux surfaces algébriques 15

Fouché : Sur la droite de Simson 14

— Sur les quadrilatères de Poncelet 15

— Sur certains systèmes de coniques 15

— Sur les cyclides du troisième ordre 15

Kiveliovitchi : Sur les points singuliers du problème des trois corps 14

Laisant : Sur les triangles héroniens 18

Maillet : Sur l'équation indéterminée $a^m + b^m = c^m$ 17

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

58698 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
59150 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTE-SIXIÈME. — ANNÉE 1918.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—

1918

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR CERTAINS TYPES DE FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. Soit une suite de nombres positifs absolument quelconques donnée *a priori*

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots \tag{1}$$

Je me propose d'étudier ici la représentation d'un nombre N *positif* quelconque sous la forme d'une fraction continue convergente

$$N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots,$$

$$(d_1 \geqq 0,\ d_2 > 0,\ \ldots,\ d_n > 0,\ \ldots, \text{ les } d_i \text{ étant entiers}).$$

Pour que tout nombre N positif > 0 admette une représentation de cette forme, il est nécessaire et suffisant que

$$x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

J'indiquerai en outre quelques propriétés de ces représentations, et je dirai un mot du cas où

$$x_n x_{n+1} > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Une partie des idées essentielles contenues dans la présente Note se trouve déjà dans mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars, 1906, Chap. IV: notamment p. 59-60 et p. 82-89). Elles sont toutefois présentées ici, à certains égards, d'une manière plus générale et plus simple.

II. Pour faciliter les écritures, je définirai x_0 par la condition $x_0 x_1 = 1$, et je supposerai $N \geqq x_1$, ce qu'on peut toujours réaliser

en ajoutant x_1 à N, écrivant $N_1 = N + x_1$, et raisonnant sur N_1 dont on efface l'indice.

Soit

$$(2)\qquad \begin{cases} N = \varepsilon_0 = d_1 x_1 + \varepsilon_1^{-1}, \\ \varepsilon_1 = d_2 x_2 + \varepsilon_2^{-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les d_i et ε_i sont positifs, avec d_i entier $\geqq 1$ [1]. Pour que tout nombre N puisse donner lieu à une suite d'opérations de ce genre, nous allons montrer qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$(3)\qquad x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En effet, je dis que cette condition est nécessaire. Soit, pour $n \geqq 1$,

$$\varepsilon_n^{-1} = \lambda_n x_n - \eta_n, \qquad \lambda_n \text{ entier} > 0, \qquad 0 < \eta_n \leqq x_n;$$

on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n x_n - \eta_n} \geqq d_{n+1} x_{n+1};$$

on peut toujours choisir N de façon que η_n soit arbitrairement petit, en sorte que

$$\lambda_n d_{n+1} x_n x_{n+1} \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Cette dernière condition (3) étant supposée remplie, je dis qu'elle est suffisante. En effet, on prendra systématiquement pour $d_{n+1} = E(\varepsilon_n x_{n+1}^{-1})$ le plus grand entier contenu dans

$$\varepsilon_n x_{n+1}^{-1} \qquad (n \geqq 0),$$

$d_{n+1} x_{n+1}$ étant alors, par définition, le plus grand multiple de x_{n+1} qui ne surpasse pas ε_n. Cela est possible puisque

$$\varepsilon_n^{-1} < x_n, \qquad \varepsilon_n^{-1} x_{n+1} < x_n x_{n+1} \leqq 1, \qquad \varepsilon_n > \frac{1}{x_n}.$$

Dès lors, on aura ainsi sans ambiguïté, pour chaque nombre

---

[1] On peut avoir éventuellement $\varepsilon_n^{-1} = 0$; dans ce cas on n'a pas à considérer les égalités (2) qui suivent la $n^{\text{ième}}$, ni les quantités $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots$.

$N \geqq x_1$, sous les conditions

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_n x_{n+1} \leqq 1, \qquad 0 \leqq \varepsilon_n^{-1} < x_n \leqq \dfrac{1}{x_{n+1}} \\ \\ d_n x_n > \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} > \dfrac{1}{2x_{n-1}} \geqq \dfrac{x_n}{2} \end{array} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

le développement, qu'on peut appeler *canonique* [en ce qui concerne la suite (1)],

$$N = d_1 x_1 + \frac{1}{d_2 x_2 + \ldots},$$

ou, avec nos notations habituelles,

$$(5) \qquad N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots;$$

c'est le résultat annoncé au n° I, si l'on vérifie maintenant que cette fraction est convergente; on le fait en se rappelant la condition nécessaire et suffisante de convergence de la fraction continue

$$a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n + \ldots$$

à quotients a_i positifs; cette condition est que la série de terme général a_i soit divergente [1]; il en est bien ainsi, puisque, d'après (4), $d_n x_n > \frac{1}{2x_{n-1}}$; sur deux quotients consécutifs $d_i x_i$, $d_{i+1} x_{i+1}$, l'un est $> \frac{1}{2}$, car $x_i x_{i+1} \leqq 1$ montre que x_i ou x_{i+1} est $\leqq 1$.

III. Considérons maintenant un développement de la forme (5), mais où les d_n sont des entiers donnés *a priori* > 0, sans qu'on se préoccupe des conditions (2) et (4), de façon toutefois que ce développement soit convergent, les inégalités (3) subsistant aussi. On peut montrer que ce développement n'est pas forcément canonique si l'on n'a pas

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \ldots + 1 : d_n + \ldots,$$

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \qquad x_{2i+1} = x_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Stern (*J. für Math.*, t. XXXVII); Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, t. VIII, 1894, J., p. 31).

En effet, posons

$$\varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \ldots,$$

ε_{n-1} et ε_n étant définis par ces égalités; si l'on veut que (4) ait lieu, il faut

$$d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}} \geqq \varepsilon_{n-1} > \frac{1}{x_{n-1}},$$

$$d_n > \frac{1}{x_n x_{n-1}} - \frac{1}{d_{n+1} x_n x_{n+1}};$$

quand on n'a pas $x_n x_{n-1} = 1$, d_n doit être > 1 dès que d_{n+1} dépasse une certaine limite : dans une fraction canonique, d_n et d_{n+1} ne sont pas entièrement indépendants, ni, par suite, arbitraires, lorsque $x_n x_{n-1} < 1$; il y a alors pour $d_n = 1$ ou assez petit, une infinité de valeurs de d_{n+1} donnant lieu à un développement non canonique, d'ailleurs convergent si la suite d_{n+2}, d_{n+3}, ... satisfait à des conditions convenables, par exemple si

$$d_{n+2} x_{n+2} + 1 : d_{n+3} x_{n+3} + \ldots$$

est un développement canonique pour la suite x_{n+2}, x_{n+3}, ...

Il n'y a d'exception à ces conclusions que si l'on a constamment $x_n x_{n-1} = 1$, c'est-à-dire quand on a

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \qquad x_{2i+1} = x_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

alors

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \ldots + 1 : d_n + \ldots$$

est une fraction continue ordinaire; les seules fractions non canoniques sont celles ayant un nombre limité de quotients et dont le dernier d_{n+1} est égal à 1; le développement canonique correspondant s'en déduit en remplaçant $d_n + \frac{1}{d_{n+1}}$ par $d'_n = d_n + 1$.

Il y a là éventuellement une cause de supériorité dans l'emploi des fractions continues ordinaires classiques.

IV. Ceci conduit à se poser diverses questions intéressantes, au sujet de la suite (1) satisfaisant aux conditions (3).

1° Un nombre N donné possède-t-il un nombre fini ou infini de

représentations

$$(5\ bis) \qquad N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots$$

(les d_i entiers > 0) ?

2° Y a-t-il des nombres N qui ne possèdent d'autre représentation (5 *bis*) que la représentation canonique ?

Envisageons d'abord la représentation canonique d'un nombre $N > 0$, avec

$$\varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1}, \qquad \varepsilon_n^{-1} < x_n.$$

Si N a une représentation non canonique, il existera une valeur de $n \geqq 1$ pour laquelle on pourra écrire

$$\varepsilon_{n-1} = \delta_n x_n + \eta_n^{-1}, \qquad 0 < \delta_n < d_n, \qquad \eta_n \geqq x_{n+1},$$

δ_n étant entier; cette condition nécessaire est aussi suffisante, car la représentation canonique de η_n donnera une représentation correspondante non canonique de N.

Il faudra et il suffira dès lors qu'on ait

$$(6) \qquad \eta_n = \frac{1}{(d_n - \delta_n) x_n + \varepsilon_n^{-1}} \geqq x_{n+1}, \qquad d_n > \delta_n > 0,$$

ou

$$(7) \qquad \varepsilon_n [1 - x_n x_{n+1} (d_n - \delta_n)] \geqq x_{n+1}, \qquad d_n > \delta_n > 0.$$

On remarquera d'abord que δ_n satisfait à l'inégalité

$$1 - x_n x_{n+1} (d_n - \delta_n) \geqq 0,$$

qui est possible ici, puisque, d'après (3), $x_n x_{n+1} \leqq 1$. Si $x_n x_{n+1} = 1$, on a

$$d_n - \delta_n = 1, \qquad \varepsilon_n^{-1} = 0, \qquad \eta_n = \frac{1}{x_n} = x_{n+1};$$

mais la représentation obtenue, non canonique, se ramène à vue à la représentation canonique. Quand $x_n x_{n+1} < 1$, il faudra et il suffira, pour qu'il y ait une représentation non canonique (correspondant à $d_n - \delta_n = 1$, et alors évidemment convergente),

$$(8) \qquad \varepsilon_n \geqq \frac{x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}}, \qquad d_n \geqq 2, \qquad n \geqq 1.$$

Dans les applications, il y aura de plus à tenir compte des con-

ditions nécessaires et suffisantes pour que le développement (5 *bis*) soit canonique.

$$(9)\qquad d_n x_n \leqq \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \ldots < (d_n + 1) x_n,$$
$$\varepsilon_n^{-1} < x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Cette dernière condition entraîne la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} < (d_n + 1) x_n,$$

et la condition suffisante $d_n x_n > \frac{1}{x_{n-1}}$, qu'on peut grouper ainsi

$$(10)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{condition nécessaire } d_n + 1 > & \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} \\ \text{condition suffisante} \qquad d_n > & \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} \end{array} \right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

On déduit aussi bien de (9) une série de conditions nécessaires ou suffisantes, qui pourront être plus avantageuses, mais seront plus compliquées, par exemple la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} \leqq d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}}$$

déjà utilisée au n° III.

On voit aussitôt qu'il y a une infinité de nombres N satisfaisant à toutes les conditions (8) et (9) pour chaque suite (1) et chaque valeur de n, lorsque $x_n x_{n+1} < 1$.

Les conditions (8) peuvent d'ailleurs subir une transformation analogue à celle que nous avons opérée sur les formules (9). La représentation (5 *bis*) étant supposée canonique, d'après (8) et (9) on a les conditions

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{nécessaires } d_n \geqq 2, & d_{n+1} + 1 > & \dfrac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \\ \text{ou} & d_{n+1} > & \dfrac{x_n x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}} \\ \text{suffisantes } d_n \geqq 2, & d_{n+1} \geqq & \dfrac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \end{array} \right\}, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pour l'existence de la représentation non canonique précitée.

Voici quelques conséquences :

V. 1° Soit une fraction continue (5 *bis*) satisfaisant à la condition suffisante (10) quel que soit $n \geqq 2$; elle donnera naissance, pour chaque valeur de $n \geqq 1$ satisfaisant aux conditions suffisantes (11), à au moins une autre fraction (5 *bis*) non canonique ayant la même valeur N. Ces diverses fractions différeront soit par la valeur du quotient $d_n x_n$ ou $\delta_n x_n$ correspondant au même indice n, soit par l'indice n auquel s'applique le procédé précité du n° IV.

Exemples. — 1° Soit, pour une valeur de $n \geqq 2$, à la fois

$$(12) \qquad 2x_{n-1}x_n \leqq 1, \qquad 2x_n x_{n+1} \leqq 1;$$

une représentation canonique (5 *bis*) du nombre N satisfait à la condition nécessaire (10), c'est-à-dire à

$$d_n + 1 > \frac{1}{x_n x_{n-1}} \geqq 2, \qquad \text{d'où} \qquad d_n \geqq 2;$$

de plus,

$$\frac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \leqq 2,$$

en sorte que la condition suffisante (11) a lieu. Dès lors, à cette représentation canonique (5 *bis*) correspond, pour cette valeur de n, par le procédé précité, une représentation non canonique de N. En particulier, quand les inégalités (12) ont lieu pour une infinité de valeurs de n, N a une infinité de représentations non canoniques.

Notons encore que, même si (12) n'a pas lieu, la deuxième condition (9), $\varepsilon_n > \frac{1}{x_n}$, entraîne la première condition (8) lorsque

$$\frac{1}{x_n} \geqq \frac{x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}} \qquad \text{ou} \qquad 2x_n x_{n+1} \leqq 1;$$

alors N a une représentation non canonique correspondante si l'on a $d_n \geqq 2$.

2° Je suppose

$$(13) \qquad 1 > \lambda_1^2 \geqq x_n x_{n+1} \geqq \lambda^2, \qquad \lambda, \lambda_1 \text{ donnés} < 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après (10), les conditions

$$(14) \quad \frac{1}{x_n x_{n-1}} \geqq \frac{1}{\lambda^2} \geqq d_n, \qquad \frac{1}{x_n x_{n-1}} < d_n, \qquad d_n \geqq 2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

sont suffisantes pour que (5 *bis*) soit canonique : nous les supposerons remplies. D'après (11), on a, puisque $1 > x_n x_{n+1}$, pour l'existence d'une représentation non canonique correspondant à l'indice n, les conditions

$$(15)\qquad \begin{cases} d_{n+1} > \dfrac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \text{ nécessaire,} \\ d_{n+1} \geqq \dfrac{1}{1-\lambda_1^2} \text{ suffisante.} \end{cases}$$

Lorsque, p et p_1 étant entiers ou non,

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \geqq p > 1, \qquad \lambda^2 \leqq \frac{p}{p+1}, \qquad \frac{1}{\lambda^2} = 1 + \frac{1}{p} < 2, \qquad \frac{1}{1-\lambda_1^2} = p_1 + 1, p \leqq p_1,$$

les conditions (14) se réduisent à

$$d_n \geqq 2 \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

les conditions nécessaire ou suffisante (15) exigent respectivement $d_{n+1} > p$ ou $d_{n+1} \geqq p_1 + 1$; il en résulte que, si l'on a $p \geqq 2$, il n'y a pas de représentation non canonique de (5 *bis*) correspondant à l'indice n, sauf dans l'un des cas suivants :

a. $p < d_{n+1} < p_1 + 1$ (peut-être);
b. $d_{n+1} \geqq p_1 + 1$ (sûrement).

D'après cela, par exemple, si p et p_1 sont entiers $\geqq 2$, les fractions continues illimitées (5 *bis*) où les nombres $d_n (n = 2, 3, \ldots)$ n'ont qu'une des valeurs $2, 3, \ldots, p$, possèdent une représentation unique de la forme (5 *bis*), laquelle est forcément canonique: celles où les nombres d_n $(n = 2, 3, \ldots)$ sont tous $\geqq 2$, certains d'entre eux étant $\geqq p_1 + 1$, ont au moins autant de représentations non canoniques distinctes qu'il y a de nombres d_{n+1} dépassant p_1.

VI. On pourrait étudier aussi, au même point de vue, les suites (1) qui ne satisfont pas aux conditions (3). Une représentation canonique est encore convergente, comme on le voit de suite. Nous indiquerons seulement un résultat, en supposant

$$(16)\qquad x_n x_{n+1} > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On sait qu'alors il y a des nombres $N > 0$ qui n'ont pas de représentation (5 *bis*); mais, toute représentation (5 *bis*) donnée est forcément canonique, d'après (6) et (7).

Premier exemple. — Si $x_n = 2$ quel que soit n, le nombre

$$N = 2\,d_1 + 1 : 2\,d_2 + \ldots + 1 : 2\,d_n + \ldots$$

est développé en une fraction continue ordinaire dont tous les quotients incomplets sont pairs. On peut les caractériser aussi comme étant les nombres positifs dont les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ ont la propriété suivante : P_n et Q_n étant de parités forcément différentes, les nombres

$$P_0 = a_0 (\text{si } N = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots),\ P_1,\ P_2,\ \ldots$$

sont alternativement pairs ou impairs, le premier étant pair, et, par suite, les nombres $Q_0 = 1$, Q_1, Q_2, ... sont aussi alternativement pairs ou impairs, le premier étant impair.

Deuxième exemple. — Si la suite (1) est formée de nombres entiers et satisfait, pour une infinité de valeurs n_1 de n à la condition

$$x_{n_1} > \varphi(n_1),$$

où $\varphi(n)$ est une fonction de n croissant assez vite avec n, les nombres

$$N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots$$

à développement illimité sont des nombres transcendants de Liouville.

D'après cela, on voit que la considération de suites (1) satisfaisant à (16) permet, quand on n'envisage que les nombres N représentables sous la forme (5 *bis*), d'isoler dans l'ensemble des nombres positifs un ensemble de nombres qui peut éventuellement jouir de propriétés arithmétiques intéressantes. Ce serait peut-être là une question à étudier d'une manière plus complète.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE QUADRATIQUE;

Par M. Amsler.

De la médiation. — Soient $a : b$ et $c : d$ deux fractions à termes entiers aux dénominateurs de même signe. $\frac{a+c}{b+d}$ s'appelle leur *médiante*. Notons les égalités

$$(1) \qquad ad - bc = a(b+d) - b(a+c) = (a+c)d - (b+d)c.$$

Elles montrent que $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre $a : b$ et $c : d$.

Au cas où $ad - bc = \pm 1$, appelons *contiguës* les deux premières fractions; chacune d'elles est contiguë à la médiante d'après les égalités (1).

Approximation d'une irrationnelle par médiations successives. — Soit ω un nombre positif donné. Partons de $1 : 0$ et $0 : 1$ et formons une suite de fractions $f_1, f_2, \ldots, f_h, \ldots, f_k, \ldots$ par la règle suivante : f_{k+1} est la médiante entre f_k et f_h, f_h étant la fraction d'indice inférieur à k la plus récemment écrite telle que f_k et f_h soient approchés de ω en sens contraires.

Les fractions se partagent en groupes de fractions approchées de ω par excès et en groupes de fractions approchées par défaut. Nous appellerons *principales* celles qui terminent les groupes en question.

A chaque fraction par excès faisons correspondre le symbole ε, à chaque fraction par défaut le symbole η. La suite des nombres ε, η correspondant aux diverses fractions et rangés dans l'ordre de formation s'appelle la *caractéristique* de ω.

Comme $1 : 0$ et $0 : 1$ sont contiguës, toute fraction de la suite est contiguë à la précédente et à la fraction principale la plus récente écrite avant cette dernière.

Interprétation des fractions principales. — Les fractions

principales coïncident avec les réduites du développement de ω en fraction continue.

Si $\varepsilon\eta_1^p\varepsilon^q\eta_1^r\varepsilon^s\eta_1^t\ldots$ est la caractéristique de ω, son développement en fraction continue a $p-1$ pour partie entière, les premiers quotients incomplets étant q, r, s, t, ...

Le théorème est évident pour les deux premières réduites $p-1$ et $\frac{(q-1)p+1}{q}$. On l'établit aisément en le supposant vrai jusqu'à un certain rang des réduites et des fractions principales et formant à l'aide de la caractéristique la fraction principale du rang suivant.

Réciproquement, si une irrationnelle positive ω est comprise entre deux fractions contiguës, ce sont deux fractions de la suite formée pour calculer ω par médiations successives, celle dont les termes sont les plus petits étant une fraction principale.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions à termes >0 et entiers comprenant entre elles ω et telles que $|ad-bc|=1$.

En supposant $a<c$, on en déduit $b<d$.

Divisons c par a et d par b

$$c = aq + r \qquad (r < a),$$
$$d = bq' + r' \qquad (r' < b).$$

Un raisonnement connu dit que $q=q'$ et que

$$ad - bc = ar' - br.$$

On forme les fractions

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a+r}{b+r'},\quad \frac{2a+r}{2b+r'},\quad \ldots,\quad \frac{qa+r}{qb+r'},$$

la dernière étant du reste $\frac{c}{d}$ elle-même; à partir de la troisième fraction, chaque fraction est la médiante entre la précédente et $\frac{a}{b}$. On aurait en classant par ordre de grandeur (croissante ou décroissante)

$$\frac{a}{b},\quad \frac{qa+r}{qb+r'},\quad \ldots,\quad \frac{2a+r}{2b+r'}.$$

Mettons à leur place ω et $\frac{r}{r'}$

$$\frac{a}{b},\quad \omega,\quad \frac{qa+r}{qb+r'},\quad \ldots,\quad \frac{2a+r}{2b+r'},\quad \frac{a+r}{b+r'},\quad \frac{r}{r'},$$

$\frac{r}{r'}$ est approché de ω comme $\frac{c}{d}$, mais avec une moins bonne approximation, et $\frac{a}{b}$, $\frac{r}{r'}$ sont deux fractions contiguës comprenant entre elles ω : on divise a par r, d'où le reste ρ ; a' par r', d'où le reste ρ'.

On est ramené au raisonnement déjà fait sur $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On continue jusqu'à épuisement des termes successifs a, r, ρ, ..., d, r', ρ', ... et le calcul est résumé dans l'un des Tableaux :

$$\frac{0}{1},\ \ldots,\ \frac{\rho}{\rho'},\ \ldots,\ \frac{a}{b},\ \omega,\ \frac{c}{d},\ \ldots,\ \frac{r}{r'},\ \ldots,\ \frac{1}{0};$$

$$\frac{1}{0},\ \ldots,\ \frac{\rho}{\rho'},\ \ldots,\ \frac{a}{b},\ \omega,\ \frac{c}{d},\ \ldots,\ \frac{r}{r'},\ \ldots,\ \frac{0}{1}.$$

En lisant ces Tableaux à rebours on voit que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ résultent de quelques médiations faites à partir de $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ pour approcher de ω, $\frac{a}{b}$ précédant un changement de sens de l'approximation.

C. Q. F. D.

On déduirait de là le théorème de Serret :

Si deux nombres positifs ω et ω' sont équivalents, c'est-à-dire liés par la relation $\omega' = \frac{p\omega + q}{p'\omega + q'}$ où p, q, p', q' sont des entiers tels que $|pq' - qp'| = 1$; ils ont en commun un quotient complet.

On montrerait qu'à partir d'un certain rang, les caractéristiques de ω et ω' coïncident.

Approximation d'une irrationnelle quadratique. — Soit à développer en fraction continue une racine d'une équation du second degré.

En amorçant le calcul par la méthode de Lagrange, on pourra toujours ramener le cas d'une équation à deux racines de même signe à celui de l'équation aux racines de signes contraires.

Soit alors

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

une équation où a, b, c sont des entiers premiers entre eux,

a et c étant de signes contraires. Nous lui ferons correspondre une forme quadratique indéfinie $ax^2 + 2bxy + cy^2$ que nous appellerons *réduite*, voulant rappeler, par là, que $ac < 0$.

Traitons l'exemple

$$3z^2 + 8z - 7 = 0.$$

Nous calculerons la racine $\omega > 0$ à partir de $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$ et nous remplacerons z par les fractions successives dans $3z^2 + 8z - 7$ pour connaître à chaque instant le sens de l'approximation. Plus commodément, nous formerons les valeurs de $3x^2 + 8xy - 7y^2$ quand x et y sont les termes des fractions successives :

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(1) & & 3 & -7 & 4 & -9 & -3 & 11 & 12 & 7 & -4 & \ldots, \\
(2) & \cdot & \frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{7} & \frac{7}{10} & \frac{9}{13} & \ldots.
\end{array}$$

La caractéristique de la racine ω est

$$\varepsilon^1 \eta^1 \varepsilon^2 \eta^2 \varepsilon^3 \ldots;$$

d'où

$$\omega = 1 - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}}$$

Appelons *index successifs* les termes de la suite (1).

On peut les calculer *directement* à partir de $3 \quad -7 \quad +4$, sans passer par la suite (2), donc sans faire de substitutions dans

$$3x^2 + 8xy - 7y^2,$$

comme nous le montrerons bientôt.

Appelons *index contigus* deux à deux les index fournis par une fraction de la suite, la fraction principale antérieure la plus récente et par leur médiante qui, précisément sont trois fractions contiguës deux à deux.

Établissons une relation du second degré entre trois index contigus.

Relations entre trois index contigus. — Soient $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ trois fractions contiguës empruntées à la suite, r, r', r'' les index correspondants, r et r' étant nécessairement de signes contraires.

On a

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = r,$$
$$ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 = r',$$
$$ap''^2 + 2bp''q'' + cq''^2 = r'',$$

avec

$$p'' = p + p', \qquad q'' = q + q'.$$

Dans la forme $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$, faisons la substitution

$$\begin{cases} x = pX + p'Y, \\ y = qX + q'Y. \end{cases}$$

Il vient

$$f(pX + p'Y, qX + q'Y) = rX^2 + \lambda XY + r'Y^2,$$

λ étant un entier; faisons $X = Y = 1$, il vient

$$r'' = r + \lambda + r',$$
$$\lambda = r'' - r - r'.$$

Mais $b^2 - ac$ est un invariant pour toute substitution linéaire faite dans f; comme $|pq' - qp'| = 1$, on a

$$\lambda^2 - 4rr' = 4(b^2 - ac)$$

ou encore

$$(1) \qquad (r'' - r - r')^2 - 4rr' = 4(b^2 - ac),$$

$$(2) \qquad r^2 + r'^2 + r''^2 - 2r'r'' - 2r''r - 2rr' = 4(b^2 - ac).$$

C'est la relation annoncée (on en déduirait qu'un index quelconque est inférieur à Δ en valeur absolue). Elle est symétrique par rapport à r, r', r''.

Remarque. — Il est clair que la forme réduite

$$rX^2 + (r'' - r - r')XY + r'Y^2,$$

où d'ailleurs $r'' - r - r'$ est *pair* d'après (1), donne précisément pour premiers index r, r', r'' quand on fait usage des fractions $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$.

Définition générale des index. — Comme on l'a dit plus haut, les index relatifs à la racine ω de $f(z, 1) = 0$ sont les résultats de la substitution dans la forme des termes des fractions qui

convergent vers le nombre $> 0 : \omega$, au fur et à mesure que le nombre des médiations augmente.

Pour une forme g *non réduite*, on pourra attribuer une suite d'index à chaque racine positive de l'équation $g(z, 1) = 0$; on les obtiendra en substituant dans $g(x, y)$ les termes des médiantes successives et commençant chaque suite à la première variation de signe accusée par les résultats de substitution.

Si dans $g(x, y)$ deux certaines fractions contiguës $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ fournissent deux résultats de signes contraires, la plus simple d'entre elles est une réduite du développement d'une racine de $g(z, 1) = 0$ en fraction continue.

Récurrence linéaire des index. — Étant donné un groupe de trois index contigus, former le suivant :

Soient r, r', r'' trois index contigus, où d'ailleurs r et r' présentent une variation. Nous distinguerons deux cas :

1° r, r', r'' présentent *deux* variations.

Par exemple $\overset{+}{r}$, $\overset{-}{r'}$, $\overset{+}{r''}$. Si r''' est le suivant de r'', il est contigu à r' et r'', donc l'équation

$$(x - r' - r'')^2 = 4r'r'' + 4(b^2 - ac)$$

admet comme racines r et r''', d'où

$$\begin{aligned} r - r' - r'' + r''' - r' - r'' &= 0, \\ r + r''' \qquad\qquad &= 2(r' + r''). \end{aligned}$$

2° r, r', r'' présentent *une* variation.

Elle est entre r et r' et l'on aura, par exemple, $\overset{+}{r}$, $\overset{-}{r'}$, $\overset{-}{r''}$.

Si r''' est le suivant de r'', il sera contigu à r et r'' et l'équation

$$(x - r - r'')^2 = 4rr'' + 4(b^2 - ac)$$

aura pour racines r' et r''', d'où

$$\begin{aligned} r' - r - r'' + r''' - r - r'' &= 0, \\ r' + r''' \qquad\qquad &= 2(r + r''). \end{aligned}$$

Concilions les cas 1° et 2° dans une règle unique.

Règle de récurrence. — On écrit les quatre index r, r', r'', r''' dans un ordre tel que les trois premiers présentent *deux* variations, *en permutant au besoin les deux premiers. La somme des extrêmes est alors le double de celle des moyens.*

Application. — Si dans un groupe de trois index contigus, on échange les deux premiers, les index postérieurs ne sont pas altérés.

A remarquer que, dans un groupe d'index contigus, l'index seul de son signe n'occupe jamais la dernière place, car il n'y a jamais lieu de prendre la médiante entre deux fractions approchées de ω dans le même sens.

Reprenons l'exemple donné plus haut et partons du groupe

$$-3 \quad -7 \quad +4$$

3	−7	+4	−9	$-9 = 2(\ \ 4-7)-3,$
−7	4	−9	−3	$-3 = 2(-9+4)+7,$
4	−9	−3	+11	.....,
4	−3	11	−12	.....,
−3	11	12	7	$7 = 2(\ 12-3)-11,$
...	..	..	.	.....

Nous construisons la suite des index et il en résulte immédiatement la caractéristique de ω.

On voit immédiatement que si r, r', r'' sont trois entiers de somme paire, r et r' étant de signes contraires, on peut engendrer une suite d'index à partir de r, r', r'', qui régira le calcul de la racine > 0 de l'équation

$$rz^2 + 2\,\frac{r''-r-r'}{2}\,z + r' = 0.$$

Rétrorécurrence des index. — Si r et r' sont de signes contraires et $r+r'+r''$ pair, on peut se demander si le groupe (r, r', r'') représente toujours un groupe d'index contigus de rang au moins égal à deux, relatif au calcul d'une certaine irrationnelle quadratique. La réponse est affirmative.

I. *r et r' seraient consécutifs.* — Soit ρ l'index principal le

plus voisin de r quand on remonte la suite supposée. On aura par exemple

$$\overset{-}{\rho}, \quad \ldots, \quad \overset{+}{r}, \quad \overset{-}{r'}, \quad r''.$$

La règle de récurrence donne

$$\rho + r'' = 2(r + r'),$$
$$\rho = 2r + 2r' - r''.$$

II. *r et r' ne seraient pas consécutifs.* — Soit σ l'index qui dans la suite supposée précède immédiatement r'; r est l'index principal le plus voisin de r' quand on remonte la suite et l'on a par exemple

$$\overset{+}{r}, \quad \ldots, \quad \overset{-}{\sigma}, \quad \overset{-}{r'}, \quad r''.$$

Appliquons la règle de récurrence

$$\sigma, \quad r'', \quad r', \quad r'';$$
$$\sigma + r'' = 2(r + r'),$$
$$\sigma = 2r + 2r' - r''.$$

Dans la suite supposée, le groupe d'index contigus qui engendre (r, r', r'') serait donc

$$(2r + 2r' - r'', r, r') \qquad \text{ou bien} \qquad (r, 2r + 2r' - r'', r');$$

encore faut-il, pour que ce groupe soit acceptable, que r et $2r + 2r' - r''$ soient de signes contraires.

Si cette condition est remplie, (r, r', r'') sera au moins le second d'une certaine suite de groupes d'index contigus; nous dirons qu'*il admet un précédent*.

Si cette condition n'est pas remplie, (r, r', r'') *n'aura pas de précédent*, mais par contre (r', r, r'') aura un précédent, puisque, dès lors, r' et $2r + 2r' - r''$ seront de signes contraires.

Donc on peut, par rétrorécurrence, constituer une suite de groupes d'index contigus où (r, r', r''), ou, peut-être, (r', r, r'') occupe un rang arbitraire et cela d'une seule manière.

Exemple. — Donnons-nous

$$-2 \quad +26 \quad +30.$$

En principe, prenons pour précédent de (r, r', r'') le groupe $(2r + 2r' - r'', r, r')$ quitte à modifier l'ordre des deux premiers pour engendrer un deuxième précédent,

$$-4 \quad +52 \quad -30, \quad -2, \quad +26 \qquad \text{ou} \qquad +18 \quad -2 \quad +26.$$

Le précédent de $+18 \quad -2 \quad +26$ serait $6 \quad 18 \quad -2$ qui est à rejeter; il faut donc écrire $-2 \quad 18 \quad 26$ et prendre le précédent $6 \quad -2 \quad 18, \ldots$. On lira le Tableau de *bas en haut :*

↑ .	...	..	..
6	-2	18	26
18	-2	26	30

Remarque. — Supposons qu'en calculant une suite d'index, on constate que le signe des index est à un moment donné stabilisé pour une durée assez longue, ce qui correspond pour ω à un quotient incomplet élevé; on pourra accélérer le calcul par le moyen d'un Tableau de différences.

Si $\left|\overset{+}{a} \quad -\overset{-}{b} \quad -\overset{-}{c}\right|$ engendre un grand nombre d'index négatifs, on verrait qu'ils se calculent par le Tableau suivant :

Index.	Δ.	Δ^2.
$-b$	—	$2a$
$-c$	—	$2a$
$2a + b - 2c$	—	$2a$
.....	..	...
$n(n+1)a + nb - (n+1)c$	—	$2a$
.....	..	...

On ira jusqu'au premier nombre > 0 qu'on rencontrera dans la première colonne et l'on reprendra la règle de récurrence ordinaire.

Périodicité des groupes d'index contigus. — Pour une forme réduite où $b^2 - ac = \Delta$, les groupes d'index contigus *font partie* des solutions en entiers *non tous du même signe* de l'équation

$$r^2 + r'^2 + r''^2 - 2r'r'' - 2r''r - 2rr' = 4\Delta$$

ou encore

$$(r'' - r - r')^2 - 4rr' = 4\Delta.$$

Soient r l'index seul de son signe; R, R′, R″ les valeurs absolues de r, r', r''. On aura

$$(R'' + R - R')^2 + 4RR' = 4\Delta,$$

équation qu'il faut résoudre en entiers positifs. En supposant $R'' \geqq R'$, on posera

$$\begin{cases} R'' + R - R' = 2\lambda, \\ RR' = \Delta - \lambda^2, \end{cases}$$

λ étant un entier positif dont le carré soit inférieur à Δ; $R'' \geqq R'$ entraîne $R \leqq 2\lambda$, ce qui conduit à rejeter la valeur $\lambda = 0$. Il y aura un nombre *fini* de solutions, puisque $\lambda^2 < \Delta$, et, *a fortiori*, la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ne pourra engendrer qu'un nombre *fini* de groupes d'index contigus.

Appliquons à l'exemple

$$3x^2 + 8xy - 7y^2 \quad \text{ou} \quad \Delta = 16 + 21 = 37;$$

$$\begin{cases} RR' = 37 - \lambda^2 & (0 < \lambda^2 < 37), \\ R'' = 2\lambda < R' - R & (R \leqq 2\lambda). \end{cases}$$

On peut former le Tableau suivant :

λ.	RR′.	R.	R′.	R″.
1	36	1	36	37
		2	18	18
2	33	1	33	36
		3	11	12
3	28	1	28	33
		2	14	18
		4	7	9
4	21	1	21	28
		3	7	12
		7	3	4
5	12	1	12	21
		2	6	14
		3	4	11
		4	3	9
		6	2	6
6	1	1	1	12

Nous soulignons les groupes qui figurent dans la suite relative à $3x^2 + 8xy - 7y^2$.

Soit p le nombre des groupes R, R′, R″ relatifs à la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Au groupe R R′ R″ *peuvent* correspondre les huit groupes suivants :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{R} - \mathrm{R}' - \mathrm{R}'', & \mathrm{R} - \mathrm{R}'' - \mathrm{R}', & -\mathrm{R}' - \mathrm{R} - \mathrm{R}'', & -\mathrm{R}'' + \mathrm{R} - \mathrm{R}', \\ -\mathrm{R} - \mathrm{R}' - \mathrm{R}'', & -\mathrm{R} - \mathrm{R}'' - \mathrm{R}', & \mathrm{R}' - \mathrm{R} - \mathrm{R}'', & \mathrm{R}'' - \mathrm{R} - \mathrm{R}', \end{array}$$

puisque l'index seul de son signe n'est jamais le dernier du groupe. Il faut même supprimer la moitié de ces groupes comme n'ayant pas de précédents. A l'instant où l'on écrira le groupe d'index contigus d'ordre $4p + 1$, *au plus tard*, il y aura dans la suite deux groupes identiques.

La règle de récurrence montre qu'à partir du groupe qui s'est reproduit le premier, il y a périodicité des groupes et par suite des index de la suite.

Je dis que le premier groupe récrit est le groupe de tête, abstraction faite de l'ordre des deux premiers index.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; nous entrons en contradiction avec la propriété signalée plus haut, au sujet de la rétrorécurrence d'après laquelle tous les précédents d'un groupe sont déterminés d'une manière unique. C. Q. F. D.

Périodicité des index. — Si le premier groupe d'index contigus admet un précédent, pour parler comme plus haut, il se reproduira tel quel. Sinon il se reproduira avec inversion des deux premiers index.

Dans le premier cas, la suite des index sera périodique au moins à partir du deuxième ; dans le second cas, elle sera périodique seulement à partir du troisième.

Remarque. — Il arrive souvent, et c'est le cas pour

$$3x^2 + 8xy - 7y^2,$$

que le groupe de tête se reproduit au signe près avant de se reproduire exactement. Dans ce cas la période d'index se décompose en deux *antipériodes* de même longueur ne différant que par un chan-

gement de signe général :

$$3\,\underline{-7\ 4\ -9\ -3\ 11\ 12}\,\overline{7\ -4\ 9\ 3\ -11\ -12}\,\underline{-7\ 4\ -9\ -3\ 11\ 12}\,\overline{\ldots}$$

Cycles de groupes d'index contigus. — Si à partir d'un groupe (r, r', r'') de trois index contigus qui admet un précédent on construit une suite d'index, le groupe de tête se reproduira tel quel et l'on aura une chaîne sans fin parfaitement périodique de groupes d'index contigus qu'on pourra reconstituer par récurrence ou rétrorécurrence à partir d'un seul de ces groupes.

Nous appellerons *cycle* une telle chaîne.

Exemple : $3\ -7\ 4$ engendre un cycle.

$7\ -3\ 4$ n'engendrerait qu'un cycle *imparfait;* il deviendrait parfait par suppression du groupe initial.

Formes réduites rattachées à un cycle. — Engendrons un cycle à partir de (r, r', r'') et soit (ρ, ρ', ρ'') un groupe du cycle.

La forme

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2$$

sera *rattachée* au cycle. Elle est réduite puisque $\rho\rho' < 0$.

Toutes les formes rattachées à un cycle sont équivalentes proprement ou improprement. Il suffit de raisonner sur deux formes consécutives, la première résultant du groupe (ρ, ρ', ρ'').

1° (ρ, ρ', ρ'') *ont deux variations*, d'où

$$\rho''' = 2(\rho' + \rho'') - \rho.$$

On vérifie aisément que les deux formes

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2 \quad \text{et} \quad \rho' X^2 + (\rho''' - \rho'' - \rho')XY + \rho'' Y^2$$

sont liées par la substitution

$$\begin{cases} x = Y, \\ y = X + Y; \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

2° (ρ, ρ', ρ'') *ont une variation*, d'où

$$\rho''' = 2(\rho'' + \rho) - \rho'.$$

Les deux formes

$$\rho x^2 + (\rho'' - \rho' - \rho)xy + \rho' y^2 \quad \text{et} \quad \rho X^2 + (\rho''' - \rho'' - \rho)XY + \rho'' Y^2$$

sont liées par la substitution

$$\begin{cases} x = X + Y, \\ y = Y; \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Cycles conjugués. — Soient un cycle et les formes réduites y rattachées.

A toute forme de la suite, faisons correspondre une autre forme par la tranformation

$$x = Y, \qquad y = -X,$$

si la première correspond à un groupe d'index à deux variations; par la transformation

$$x = X, \qquad y = -Y,$$

si le groupe en question ne présente qu'une variation.

Si l'on range les nouvelles formes en sens inverse de l'ordre de formation, elles sont rattachées à un certain cycle. Pour le démontrer, considérons deux formes consécutives : f_1, f_2 rattachées au cycle donné, les formes nouvelles g_{-1} et g_{-2} qui leur correspondent.

Il y a lieu de distinguer quatre cas, suivant les nombres de variations que comportent les groupes d'index qui engendrent f_1 et f_2.

Traitons le cas où f_1, f_2 sont engendrées par deux groupes à deux variations.

$$f_1 \to \overset{+}{r} \quad \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r''}, \qquad f_1 = rx^2 + (r'' - r - r')xy + r'y^2;$$

$$f_2 \to \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r''} \quad 2r' + 2\overset{-}{r''} - r, \qquad f_2 = r'x^2 + (r' + r'' - r)xy + r''y^2.$$

A f_1 correspond

$$g_{-1} = r'X^2 - (r'' - r - r')XY + rY^2;$$

A f_2 correspond

$$g_{-2} = r''X^2 - (r' + r'' - r)XY + r'Y^2.$$

Prouvons que g_{-2}, g_{-1} sont deux formes consécutives rattachées a un même cycle.

Dans g_{-2} faisons

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Il vient

$$\overset{+}{r''} \quad \overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r}.$$

Faisons les mêmes substitutions dans g_{-1}; il vient

$$\overset{-}{r'} \quad \overset{+}{r} \quad 2r + 2r' - r''.$$

Le signe $2r + 2r' - r''$ n'est du reste pas douteux; puisque (r, r', r'') admet un précédent, c'est que $2r + 2r' - r''$ est du signe —. On voit que $\left(\overset{+}{r''}, \overset{-}{r'}, \overset{+}{r}\right)$ et $\left(\overset{-}{r'}, \overset{+}{r}, \overset{-}{2r + 2r' - r''}\right)$ sont deux groupes dont le premier engendre le second en appliquant la règle de récurrence. C. Q. F. D.

(Démonstration analogue dans les trois autres cas.)

On lira donc les g dans l'ordre des indices croissants et elles seront rattachées à un cycle.

Ce cycle sera dit *conjugué* du premier.

En observant les quatre formes f_1, g_{-1}, f_2, g_{-2} dans les quatre cas possibles, on trouve que f_1 et g_{-1}, d'une part, et f_2 et g_{-2} de l'autre, sont engendrés par des groupes d'index ayant le même nombre de variations.

Comme la transformation

$$|x, y; X, -Y| \quad \text{ou} \quad |x, y; Y, -X|$$

devient dès lors réversible, on voit que deux cycles conjugués sont réciproques.

Signification du cycle conjugué d'un cycle donné. — Calculons la racine positive de

$$rZ^2 + (r'' - r - r')Z + r' = 0;$$

le calcul est régi par le cycle issu de r, r', r''.

Dans l'hypothèse où r, r', r'' présentent deux variations, posons $Z = -\frac{1}{Z}$, il vient

$$r'Z^2 - (r'' - r - r')Z + r = 0.$$

La racine positive de cette équation se calcule au moyen du cycle conjugué du proposé.

Donc si un cycle régit le calcul d'une racine > 0 de

$$rZ^2 + (r'' - r - r')Z + r' = 0,$$

le conjugué régit le calcul de la deuxième racine ou peut-être de son inverse, suivant que r, r', r'' présentent une ou deux variations.

Théorème. — *Les suites d'index relatives à deux cycles conjugués présentent la même succession de signe + et —, à condition qu'on renverse le sens de lecture pour l'une d'elles.*

Dans les quatre cas distingués plus haut, comparons les signes de deux groupes de trois index consécutifs r', r'', r''' et son analogue; en respectant le sens de lecture propre à chaque cycle; on trouve :

	Cycle donné.			Cycle conjugué.		
I.....	—	+	—	—	+	—
II.....	—	+	+	+	+	—
III.....	—	—	—	—	—	—
IV.....	—	—	+	+	—	—

La propriété est visible.

Remarque. — Toutes les formes rattachées à deux cycles conjugués sont évidemment *équivalentes* (*proprement ou improprement*).

Théorème de Lagrange. — Nous avons ramené le cas d'une forme indéfinie quelconque à celui d'une forme réduite.

La suite des index étant périodique au moins à partir du troisième, la fraction continue qui développe une irrationnelle quadratique quelconque *finit par être périodique*.

D'après les propriétés des cycles conjugués, la période des quotients incomplets relatifs à l'une des racines d'une équation du deuxième degré est celle des quotients incomplets de l'autre lue en sens inverse.

Traitons

$$az^2 + 2bz + c = 0, \qquad \text{avec} \qquad ac < 0.$$

En changeant au besoin z en $\frac{1}{z}$, on pourra toujours faire en sorte que le groupe d'index contigus $(a, c, a+2b+c)$ admette un précédent. Il y aura lieu de distinguer quatre cas, suivant que ce groupe initial $(a, c, a+2b+c)$ présente une ou deux variations et que, lors de sa première réapparition, a et c sont ou ne sont pas consécutifs dans la suite.

Traitons l'un de ces quatre cas; celui où $(a, c, a+2b+c)$, qui admet un précédent, ne présente qu'une variation, a et c étant consécutifs dans la suite lors de la première réapparition du groupe.

Écrivons la suite d'index et au-dessous la caractéristique

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \overset{+}{a} & \overset{-}{c} & \overset{-}{a+2b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \overset{+}{a} & \overset{-}{c} & \overset{-}{a+2b+c} & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta^{\alpha} & \varepsilon^{\beta} & \eta^{\gamma} & \ldots & \varepsilon^{\lambda} & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & \eta^{\alpha} & \varepsilon^{\beta} & \eta^{\gamma} & \ldots \end{array}$$

α étant au moins égal à 2; $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ au moins égaux à 1.

L'irrationnelle a pour partie entière $\alpha - 1$, la période des quotients incomplets étant $\beta, \gamma, \ldots \lambda, \alpha$; de même, dans les autres cas; on observe les résultats suivants :

1° Si l'équation a entre -1 et $+1$ *un nombre pair* (0 ou 2) de racines, ces deux racines s'expriment par des fractions continues périodiques, la partie non périodique comprenant *un* quotient incomplet.

2° Si elle a entre -1 et $+1$ *une seule* racine, on trouve *deux* fractions continues *immédiatement* périodiques.

On en déduit aisément que :

Si une équation quelconque du deuxième degré a une racine développable en fraction continue immédiatement périodique, elle a une seule de ses racines entre -1 et $+1$, l'autre étant du signe contraire, plus grande que 1 en valeur absolue et pourvue d'un développement immédiatement périodique.

Irrationnelles rattachées à un cycle. — Ce sont les racines positives des équations successives

$$\rho z^2 + (\rho'' - \rho - \rho')z + \rho' = 0.$$

Deux irrationnelles consécutives sont liées par l'une des rela-

tions

$$u = \frac{1}{t+1},$$

$$u = t+1,$$

suivant le nombre pair ou impair des variations du groupe (ρ, ρ', ρ'') qui engendre u.

La partie non périodique de l'irrationnelle engendrée par (ρ, ρ', ρ'') est égale au nombre des index qui suivent ρ' et sont du même signe que lui. On formera la période en lisant au delà.

Une irrationnelle rattachée à un cycle est en même temps plus petite que 1 *et immédiatement périodique, en même temps plus grande que* 1 *et affectée d'un quotient incomplet non périodique.*

THÉORÈME. — *Si deux formes réduites sont liées par une substitution unimodulaire, et que l'une d'elles soit rattachée à un cycle, ce cycle est contenu dans le cycle parfait ou imparfait engendré par l'autre.*

Soit

$$\varphi(x, y) = rx^2 + (r'' - r - r')xy + r'y^2$$

une forme rattachée à un cycle.

Soit $f(x, y)$ une autre forme réduite telle que l'identité suivante ait lieu :

$$(1)\quad f(pX + qY, p'X + q'Y) = \varphi(X, Y), \qquad \text{avec} \qquad |pq' - qp'| = 1,$$

p, q, p', q' étant quatre entiers.

Nous distinguerons deux cas, suivant que p' et q' sont de même signe ou de signes contraires.

1° *p' et q' sont de même signe.* — L'égalité $|pq' - qp'| = 1$ montre que p et q sont aussi de même signe, ainsi que les deux fractions $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$. Ces deux fractions ont pour médiante $\frac{p+q}{p'+q'}$.

Dans l'identité (1) faisons successivement

$$\begin{cases} X = 1, \\ Y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0, \\ Y = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 1, \\ Y = 1. \end{cases}$$

Il vient

$$f(p, p') = r,$$
$$f(q, q') = r',$$
$$f(p+p', q+q') = r''.$$

Puisque $rr' < 0$, il y a une racine de l'équation $f(z, 1) = 0$ comprise entre les deux fractions de même signe contiguës $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$.

C'est dire que, si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$ sont positives, (r, r', r'') sont un groupe d'index contigus du cycle parfait ou imparfait engendré par la forme $f(x, y)$; si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{q}{q'}$ sont négatives, (r, r', r'') fait partie du cycle conjugué de celui qu'engendre $f(x, y)$.

2° *p et p' sont de signes contraires.* — L'égalité $|pq' - qp'| = 1$ montre que p et q sont de signes contraires et que les fractions $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont de même signe, leur médiante étant $\frac{p-q}{p'-q'}$.

Dans l'identité (1) faisons successivement

$$\begin{cases} X = 1, \\ Y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 1, \\ Y = -1; \end{cases}$$

il vient

$$f(p, p') = r,$$
$$f(-q, -q') = r',$$
$$f(p-q, p'-q') = 2r'' + 2r' - r''.$$

Réglons l'ordre de r et r' par la condition que le groupe des trois nombres admette un précédent.

En somme, nous venons de former un groupe emprunté au cycle conjugué du cycle Γ auquel φ se rattache.

Si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont positives, le cycle conjugué de Γ fait partie du cycle engendré par f.

Si $\frac{p}{p'}$ et $\frac{-q}{-q'}$ sont négatives, le cycle conjugué de Γ fait partie du cycle conjugué de celui qu'engendre f; plus simplement Γ fait partie du cycle engendré par f, puisque deux cycles conjugués sont réciproques. C. Q. F. D.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes réduites diffèrent par une substitution unimodulaire est que les deux cycles qu'elles engendrent, rendus parfaits, s'il y a lieu, par suppression du groupe de tête, soient identiques ou conjugués.*

Les deux parties de ce théorème ont été démontrées plus haut.

Applications. — I. La substitution automorphe la plus simple relative à une forme réduite f est le produit des substitutions élémentaires de module

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

effectuées au cours du cycle entre deux appositions consécutives de la forme f.

Quand il y a deux antipériodes d'index, on trouve, en plus, des substitutions qui restituent la forme au *signe près*.

II. *Décomposer une substitution unimodulaire en ses éléments.* — Soit la substitution

$$\begin{cases} x = 6X + 5Y, \\ y = 7X + 6Y, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = +1.$$

Appliquons-la à la forme réduite $\lambda x^2 - \mu y^2$, où λ et μ sont deux entiers > 0. Il vient la forme

$$\lambda(6X + 5Y)^2 - \mu(7X + 6Y)^2,$$

qui sera réduite si

$$(36\lambda - 49\mu)(25\lambda - 36\mu) < 0.$$

Prenons pour fraction $\frac{\lambda}{\mu}$ la médiante entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{36}{25}$, donc $\frac{85}{61}$.

Nous aurons la forme $85x^2 - 61y^2$ et la transformée

$$71X^2 - 24XY - 71Y^2,$$

aux deux termes extrêmes de laquelle figurent des coefficients opposés, d'après une propriété connue de la médiante.

Le groupe $71 \quad -71 \quad -24$ n'admet pas de précédent, car

$$2(71-71)+24=24$$

est du signe de 71.

Dans le cycle issu de $85x^2-61y^2$ identique d'ailleurs à son propre conjugué, vu l'absence du terme rectangle de la forme, il faut nous attendre à trouver le groupe $-71 \quad 71 \quad -24$ et non pas $71 \quad -71 \quad -24$.

Corrélativement, il s'introduit une forme

$$-71X'^2-24X'Y'+71Y^2$$

et non pas

$$71X^2-24XY-71Y^2,$$

comme transformée de $85x^2-61y^2$.

Calculons les index consécutifs à -61 :

					Index.	Δ.	Δ².				
85	61	−24	−159 →		−159	−50	+48	+24	−71	+71	−24
−61	24	−159	−209 →		−209	−2	+48	−71	+71	−24	
24	−159	−209			−211	+46	+48				
					−165	+94	+48				
					−71	+142					
					+71						

D'après les nombres de variations des groupes d'index contigus, nous posons

$$x=y_1, \quad y=x_1+y_1; \qquad x_1=y_2, \quad y_1=x_2+y_2; \qquad x_2=x_3+y_3, \quad y_2=y_3; \qquad x_3=x_4+y_4, \quad y_3=y_4;$$

$$x_4=x_5+y_5, \quad y_4=y_5; \qquad x_5=x_6+y_6, \quad y_5=y_6; \qquad x_6=Y', \quad y_6=X'+Y'; \qquad X'=Y, \quad Y'=X.$$

Telles sont les substitutions élémentaires cherchées.

III. Toutes les formes réduites ou non pour lesquelles

$$b^2-ac=\Delta,$$

où Δ est un entier positif donné, non carré parfait, se ramènent par une substitution unimodulaire à un nombre fini de formes réduites. On le verra en utilisant l'équation

$$\Sigma(r^2-2r'r'')=4\Delta.$$

Par exemple, le Tableau donné plus haut pour $\Delta = 37$, conduit à former trois cycles distincts dont le premier coïncide avec son conjugué, les deux derniers étant conjugués l'un de l'autre.

Toute forme *de l'ordre propre* où $\Delta = 37$ se ramène par une substitution unimodulaire à l'une des deux formes

$$x^2 - 37y^2, \quad 3x^2 + 8xy - 7y^2.$$

Relations entre les fractions qui correspondent à deux périodes consécutives d'index. — Appelons *fractions homologues* deux fractions qui sont séparées par $m - 1$ autres fractions, m étant le nombre d'index de la période.

En renversant au besoin toutes les fractions de la suite, on pourra supposer que le groupe initial de trois index contigus admet un précédent, donc que la suite des index est périodique au moins dès le deuxième. Reprenons la forme

$$3x^2 + 8xy - 7y^2.$$

Elle conduit aux deux suites :

$$3 \quad \underbrace{-7 \;\; 4 \;\; -9 \;\; -3 \;\; 11 \;\; 12 \quad 7 \;\; -4 \;\; 9 \;\; 3 \;\; -11 \;\; -12}_{\text{période des index.}} \quad -7 \;\; +4 \;\; \ldots,$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{0} & & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{7} & \frac{=7}{10} & \frac{9}{13} & \frac{16}{23} & \frac{25}{36} & \frac{34}{49} & \frac{59}{85} & \frac{84}{121} & \frac{109}{157} \ldots \\
- & & = & & & & & & & & & - & & & = &
\end{array}$$

Soit $\frac{x}{y}$ une fraction quelconque de la suite, on peut l'écrire $\frac{1x + 0y}{0x + 1y}$, mettant ainsi en évidence le résultat des médiations effectuées de proche en proche à partir des deux fractions initiales $\frac{1}{0}$ et $\frac{0}{1}$.

Si $\frac{X}{Y}$ est la première fraction homologue de $\frac{x}{y}$ qui lui est postérieure, il faudra la noter $\frac{25x + 84y}{36x + 121y}$, à cause de la périodicité des index, et l'on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} X = 25x + 84y. \\ Y = 36x + 121y. \end{cases}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 25 & 84 \\ 36 & 121 \end{vmatrix}$ est égal à $+1$, car $\frac{25}{36}$ est approché

de la racine cherchée comme $\frac{1}{0}$, $\frac{84}{121}$ l'est comme $\frac{0}{1}$ et l'on a

$$1 \times 1 - 0 \times 0 = +1.$$

On forme donc aisément la récurrence entre deux fractions homologues consécutives en observant la première réapparition du groupe initial d'index conjugués.

$\frac{x}{y}$ et $\frac{X}{Y}$ fournissant le même index, on a l'égalité suivante pour une infinité de couples de valeurs de x, y :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8xy - 7y^2 = {} & 3(25x + 84y)^2 \\ & + 8(25x + 84y)(36x + 121y) - 7(36x + 121y)^2. \end{aligned}$$

C'est donc une identité, de telle sorte que les formules (1) fournissent la substitution automorphe la plus simple de la forme considérée.

Relations entre les fractions qui correspondent à deux antipériodes consécutives d'index. — Un raisonnement analogue conduirait à former, dans le cas de deux antipériodes, une fraction quelconque à l'aide de celle dont le rang est moindre d'un nombre égal à celui des index d'une antipériode. Dans l'exemple choisi, on aura

$$(\underline{2}) \qquad \begin{cases} X_1 = 2x + 7y, \\ Y_1 = 3x + 10y. \end{cases}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$ est égal à -1, car au classement $\frac{1}{0} > \frac{0}{1}$ correspond, à cause du signe contraire des index, le classement $\frac{2}{3} < \frac{7}{10}$.

Les formules $(\underline{2})$ fournissent une substitution, qui restitue la forme au signe près, la plus simple de toutes.

Le produit de deux substitutions telles que $(\underline{2})$ redonne la substitution $(\underline{1})$.

Récurrence entre les trois fractions homologues de trois périodes consécutives. — Soit une suite de fractions où la récurrence des fractions homologues de deux périodes consécutives

s'exprime par

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = pX + qY, \\ Y' = rX + sY, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = +1.$$

Prenons l'homologue immédiatement suivante $\frac{X''}{Y''}$; on a

$$\begin{cases} X'' = pX' + qY', \\ Y'' = rX' + sY'. \end{cases}$$

Des équations (1) nous tirons, puisque $ps - qr = +1$,

$$X = sX' - qY',$$

d'où par addition

$$X + X'' = (p + s)X'.$$

On aurait de même

$$Y + Y'' = (p + s)Y'.$$

On a donc la récurrence

$$\begin{cases} X'' - (p + s)X' + X = 0, \\ Y'' - (p + s)Y' + Y = 0. \end{cases}$$

Dans l'exemple choisi, on aura

$$p + s = 146.$$

Récurrence entre les fractions relatives à trois antipériodes consécutives d'index. — Supposons qu'il y ait deux antipériodes dans la période. Si les trois fractions $\frac{X}{Y}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, $\frac{X_2}{Y_2}$ rencontrées dans cet ordre ont deux fractions homologues $\frac{X}{Y}$ et $\frac{X_2}{Y_2}$ consécutives et la fraction $\frac{X_1}{Y_1}$ qui en est équidistante, on aurait

$$\begin{cases} X_1 = p_1 X + q_1 Y, \\ Y_1 = r_1 X + s_1 Y; \end{cases} \qquad \begin{cases} X_2 = p_1 X_1 + q_1 Y_1, \\ Y_2 = r_1 X_1 + s_1 Y_1, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad p_1 s_1 - q_1 r_1 = -1,$$

et l'on en déduirait

$$\begin{cases} X_2 - (p_1 + s_1)X_1 - X = 0, \\ Y_2 - (p_1 + s_1)Y_1 - Y = 0. \end{cases}$$

Dans l'exemple choisi, on aurait $p_1 + s_1 = 12$; d'où

$$X_2 - 12X_1 - X = 0,$$
$$Y_2 - 12Y_1 - Y = 0.$$

En multipliant l'échelle de récurrence $u^2 - 12u - 1$ par $u^2 + 12u - 1$, on a

$$(u^2 - 1)^2 - 144u^2 = u^4 - 146u^2 + 1$$

qui correspond bien à la récurrence entre trois fractions homologues consécutives.

D'une façon générale, on aurait

$$p + s = (p_1 + s_1)^2 + 2.$$

Application à $x^2 - Dy^2$, *où* $D > 0$. — Soit, par exemple,

$$x^2 - 7y^2.$$

Cette forme est réduite, puisque 1 et -7 sont de signes contraires.

Le premier groupe d'index contigus est $1 \quad -7 \quad -6$, qui a un précédent, car $2(1 - 7) + 6 = -6$ qui est du signe contraire à 1.

Formons le cycle

$$\begin{array}{rrr|r}
1 & -7 & -6 & -3 \\
1 & -6 & -3 & +2 \\
1 & -3 & +2 & -3 \\
-3 & 2 & -3 & 1 \\
2 & -3 & 1 & -6 \\
-3 & 1 & -6 & -7 \\
1 & -6 & -7 & -6 \\
\hline
1 & -7 & -6 &
\end{array}
\qquad
\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}$$

D'où les deux suites

$$\begin{array}{c|rrrrrrr|rrrrrrr|c}
1 & -7 & -6 & -3 & 2 & -3 & 1 & -6 & -7 & -6 & -3 & 2 & -3 & 1 & -6 & \ldots \\
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{5}{2} & \frac{8}{3} & \frac{13}{5} & \frac{21}{8} & \frac{29}{11} & \frac{37}{14} & \frac{45}{17} & \frac{83}{31} & \frac{127}{48} & \frac{209}{79} & \ldots
\end{array}$$

Récurrence à deux périodes et substitution automorphe fondamentale

$$\begin{cases} X' = 8X + 21Y, \\ Y' = 3X + 8Y. \end{cases}$$

Récurrence à trois périodes

$$\begin{cases} X'' - 16X' + X = 0, \\ Y'' - 16Y' + Y = 0. \end{cases}$$

Le premier index engendré par $x^2 - Dy^2$ est toujours $+1$. L'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ admet donc pour solutions tous les couples de valeurs de x, y formées à l'aide des homologues de $\frac{0}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{127}{48}$, ...

Prouvons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit par exemple (a, b) une solution de $x^2 - 7y^2 = 1$. On en conclut

$$\frac{a}{b} > \sqrt{7}, \quad \frac{7b}{a} < \sqrt{7}.$$

Donc $\sqrt{7}$ est compris entre deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{7b}{a}$, contiguës d'ailleurs, puisque $a \times a - 7b \times b = +1$. La plus simple des deux est donc une réduite du développement de $\sqrt{7}$. C'est $\frac{a}{b}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — On aurait un résultat analogue dans le cas où la suite présente l'index -1.

Par exenple la plus petite solution de $x^2 - 73y^2 = -1$ est

$$x = 1068, \qquad y = 125;$$

toutes les autres proviennent des fractions homologues de $\frac{1068}{125}$.

La première des solutions de $x^2 - 73y^2 = +1$ est

$$x = 2281249, \qquad y = 267000.$$

Bibliographie. — A. Hurwitz, *Math. Ann.*, t. XXXIX, 1892, p. 279; t. XLV, 1894, p. 85; *Mathematical Papers of the Chicago Congress*, 1893, éd. New-York, 1896, p. 125.

G. Humbert. *Journal de Math.* (7e série). t. II, Fasc. II, 1916, p. 104.

SUR LA VARIATION DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UN CONDUCTEUR DONT LA SURFACE SE DÉFORME ;

PAR M. PAUL LÉVY.

1. On sait les services que peut rendre, pour l'étude de certaines fonctions de lignes ou de surfaces, la détermination de leurs dérivées fonctionnelles. Cette méthode a été introduite dans la Physique mathématique par M. Hadamard, qui a déterminé les dérivées fonctionnelles des fonctions de Green, et en a déduit des inégalités fort importantes pour l'étude de ces fonctions.

L'objet du Chapitre I du présent Mémoire est d'appliquer la même méthode à l'étude de la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur. Dans le Chapitre II nous étudierons le problème correspondant de géométrie plane, et dans le Chapitre III nous étudierons au point de vue de leur intégrabilité les équations aux dérivées fonctionnelles formées dans le Chapitre II.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU PROBLÈME DANS L'ESPACE.

2. Bien que la solution du problème de la distribution de l'électricité, lorsqu'on connaît la fonction de Green, soit bien connue, nous allons reprendre la question de manière à obtenir les formules fondamentales sous la forme la plus commode pour la suite.

Nous considérerons le cas de deux conducteurs en présence, limités par des surfaces S et S'. On n'ajouterait aucune circonstance essentiellement nouvelle en augmentant le nombre des conducteurs.

Nous désignerons par g_B^A la fonction de Green relative au problème extérieur de Dirichlet, c'est-à-dire au problème de déterminer une fonction harmonique $f(A)$ du point A, connaissant ses valeurs sur les surfaces S et S', et sachant qu'elle est régulière à l'extérieur de ces surfaces et s'annule à l'infini. Ce problème est

résolu par la formule

$$(1) \qquad f(A) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\, dS,$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble des surfaces S et S′, M désignant le point de ces surfaces correspondant à l'élément dS, et le sens positif sur la normale à chacune de ces surfaces étant dirigé vers l'extérieur.

Lorsque les surfaces S et S′ se déforment, le déplacement de chaque point M, compté normalement à ces surfaces, étant désigné par δn, et les points A et B étant des points fixes extérieurs à ces surfaces, la variation de g_B^A est donnée par la formule connue

$$(2) \qquad \delta g_B^A = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dg_M^A}{dn} \frac{dg_B^M}{dn} \delta n\, dS,$$

l'intégrale étant étendue à l'ensemble des surfaces S et S′, ou bien seulement, ce qui revient au même, aux portions de ces surfaces qui se déforment effectivement.

3. Ceci posé, soit à résoudre le problème de la distribution de l'électricité sur les surfaces S et S′.

Supposons en premier lieu que le potentiel soit égal à 1 sur la surface S et à zéro sur la surface S′. La formule (1) nous montre qu'en un point quelconque A extérieur à ces deux surfaces, il a la valeur

$$(3) \qquad U_A = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{dg_M^A}{dn}\, dS.$$

En appelant x une des coordonnées du point A, on obtient par dérivation de l'expression précédente la composante X de la force électrique dans le sens de l'axe des x,

$$(4) \qquad X = -\frac{\partial U_A}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg_M^A}{dn}\right) dS.$$

La fonction g_B^A, et par suite sa dérivée par rapport à x, étant une fonction harmonique de B, on ne change pas la valeur de l'intégrale en remplaçant la surface S par une surface Σ entourant S et extérieure à S′. Cela est vrai, même si l'on ne peut pas amener S sur Σ par une déformation continue sans qu'à un certain moment

la surface considérée contienne le point A. En effet, g_B^A est la somme de $\frac{1}{r}$ et d'une fonction régulière, sauf lorsque A et B sont voisins d'un même point des surfaces S ou S'. Il en résulte que l'intégrale analogue à l'intégrale (3), mais prise sur la surface Σ, est discontinue, quand A traverse la surface Σ, à la manière d'un potentiel de double couche de densité constante, et par suite que toutes ses dérivées sont continues. Donc le fait que, pendant la déformation de Σ, le point A vienne à traverser cette surface, n'empêche pas que l'intégrale analogue à l'expression (4), mais prise sur Σ, reste constante.

Cette remarque permet d'appliquer la formule (4), non seulement pour avoir la force électrique en un point de S', mais même, à condition de remplacer S par Σ, en un point de S, et d'avoir en particulier, par un choix convenable de la direction de l'axe des x, la force électrique normale à la surface; il s'agit, bien entendu, non de la force à laquelle sont soumises les masses électriques situées sur cette surface, mais de la force à laquelle serait soumise une masse électrique extérieure au moment où elle atteindrait un point P de cette surface. On sait d'autre part que cette force a la valeur $4\pi\sigma_P$, σ_P désignant la densité électrique en P. On a donc, que P soit sur S ou sur S',

$$(5) \qquad \sigma_P = -\frac{1}{16\pi^2}\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P}\, d\Sigma,$$

$\frac{d}{dn}$ et $\frac{d}{dn_P}$ désignant respectivement les dérivées normales à Σ en M et à S ou S' en P [1]. Si P est sur S', on peut prendre pour Σ la surface S. Si P est sur S, il faut que Σ entoure P.

Par une nouvelle intégration, on en déduit les quantités totales d'électricité I et J situées respectivement sur S et sur S'. On a ainsi

$$(6) \qquad I = -\frac{1}{16\pi^2}\int_S\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P}\, dS\, d\Sigma,$$

---

[1] Nous désignerons de même par $\frac{d}{dn_1}$ ou $\frac{d}{dn'}$ des dérivées normales en des points appelés M_1 ou M'; et nous écrirons dans la suite σ sans indice au lieu de σ_M; cela simplifiera les formules, la lettre M étant celle qui y reviendrait le plus souvent.

ou, par une nouvelle application des mêmes remarques,

$$(7) \qquad I = -\frac{1}{16\pi^2}\int_{\Sigma}\int_{\Sigma_1}\frac{d^2 g_{M_1}^{M}}{dn\,dn_1}\,d\Sigma\,d\Sigma_1.$$

Σ et Σ_1 désignant deux surfaces entourant S, extérieures à S′, sans point commun entre elles, décrites respectivement par les points M et M_1. De même on a

$$(8) \qquad J = -\frac{1}{16\pi^2}\int_{\Sigma}\int_{\Sigma'}\frac{d^2 g_{M'}^{M}}{dn\,dn'}\,d\Sigma\,d\Sigma',$$

Σ' étant une surface entourant S′ et extérieure à Σ, décrite par le point M′. Dans cette formule, on peut remplacer Σ par S et Σ' par S′.

4. Le potentiel U_A, défini par les valeurs 1 sur S et zéro sur S′ et à l'infini, est partout, à l'extérieur de S et S′, compris entre 0 et 1.

Il en résulte que, pour un point partant de la surface S, il commence par décroître. Donc la force électrique normale est positive en chaque point de cette surface, et par suite la densité σ_P et la charge électrique totale I sont positives.

On voit de même qu'en chaque point de la surface S′ la densité σ_P est négative, et que la charge électrique totale J située sur cette surface est négative. Cela résulte aussi des formules (5) et (8), en prenant S et S′ comme surfaces d'intégration.

Pour un point s'éloignant à l'infini, le potentiel est positif et tend vers zéro; il doit donc en moyenne décroître, ce qui conduit à penser que le flux de force sortant d'une sphère de rayon très grand est positif. On peut l'établir rigoureusement. Ce flux a la valeur

$$4\pi(I + J) = -R^2\int\frac{dU}{dn}\,d\omega.$$

l'intégrale étant prise à la surface de la sphère considérée, et $d\omega$ désignant l'angle solide sous lequel chaque élément de cette surface est vu du centre de la sphère. Considérant une série de sphères concentriques, entourant toutes S et S′, et dont les rayons varient de R_1 à R_2; multiplions les deux membres de l'égalité

précédente par $\frac{dR}{R^2}$ et intégrons de R_1 à R_2. Il vient

$$4\pi(I+J)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\int d\omega\int_{R_1}^{R_2}\frac{dU}{dn}\,dR=\int(U_1-U_2)\,d\omega.$$

U_1 et U_2 désignant les valeurs du potentiel sur les deux sphères considérées en des points situés sur un même rayon.

R_1 restant fixe, faisons croître indéfiniment R_2. U_2 tend uniformément vers zéro, et l'on a à la limite

$$\frac{4\pi(I+J)}{R_1}=\int U_1\,d\omega,$$

ce qui montre bien que $I+J$ est positif. En d'autres termes, J est en valeur absolue inférieur à I.

5. On étudie de même le cas où le potentiel est égal à zéro sur S et à 1 sur S'. Il suffit, dans les résultats précédents, de permuter le rôle des surfaces S et S'. On trouve ainsi que la densité électrique a la valeur

$$\sigma'_P=-\frac{1}{16\pi^2}\int_{\Sigma'}\frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,d\Sigma', \tag{9}$$

Σ' étant une surface entourant S', qui peut se confondre avec S' dans le cas où P est sur S. Cette densité est positive sur S' et négative sur S.

La charge électrique totale sur S a la valeur J obtenue dans le cas précédent pour la charge sur S', tandis que la charge sur S' a la valeur

$$I'=-\frac{1}{16\pi^2}\int_{S'}\int_{\Sigma'}\frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,dS'\,d\Sigma', \tag{10}$$

M et P décrivant respectivement les surfaces Σ' et S'; la surface S' peut être remplacée dans cette intégrale par une surface Σ'_1 comprise entre S' et Σ'.

L'intégrale I' est, comme I, positive et supérieure à J en valeur absolue.

6. Si enfin on suppose le potentiel égal à U sur la surface S et à U' sur la surface S' (U et U' étant des constantes), on déduit de

la forme linéaire de toutes les opérations qui permettent de passer du potentiel à la distribution de l'électricité par la méthode du n° 3, que les charges électriques Q et Q′ des surfaces S et S′ ont les valeurs

$$(11)\qquad \begin{cases} Q = IU - JU', \\ Q' = JU + I'U'. \end{cases}$$

Le déterminant

$$\Delta = II' - J^2$$

de ces équations est positif, puisque I et I′ sont positifs et supérieurs à J en valeur absolue. On peut donc les résoudre par rapport à U et U′,

$$(12)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{I'}{\Delta}Q - \dfrac{J}{\Delta}Q' = \dfrac{Q}{I_1} + \dfrac{Q'}{J_1}, \\ U' = -\dfrac{J}{\Delta}Q + \dfrac{I}{\Delta}Q' = \dfrac{Q}{J_1} + \dfrac{Q'}{I'_1}, \end{cases}$$

en posant

$$(13)\qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{\Delta}{I'} = I' - \dfrac{J^2}{I'}, \\ J_1 = -\dfrac{\Delta}{J} = J - \dfrac{II'}{J}, \\ I'_1 = \dfrac{\Delta}{I} = I' - \dfrac{J^2}{I}. \end{cases}$$

Il en résulte que la méthode employée au n° 3 permet de connaître la distribution de l'électricité, non seulement lorsqu'on se donne U et U′, mais aussi lorsqu'on se donne Q et Q′; il suffit, dans ce cas, de commencer par en déduire U et U′ par les formules (13).

Dans le cas d'un conducteur isolé, on appelle *capacité* le rapport de la charge électrique au potentiel. Dans le cas qui nous occupe, on voit que la notion de capacité a besoin d'être précisée, ce rapport n'étant pas constant; il y a lieu de mettre en évidence soit les coefficients I, J, I′ des relations (11), soit les coefficients I_1, J_1, I'_1 des relations (12). Nous considérerons surtout les premiers, qui sont plus simples, et appellerons les coefficients I et I′ *capacité* des surfaces S et S′, et J *coefficient d'influence mutuelle* de ces deux surfaces.

Variation des intégrales I, I′ et J.

7. En raison du rôle symétrique joué dans ce qui précède par les surfaces S et S′, il suffit de considérer le cas d'une déformation de la surface S. Comme nous l'avons indiqué à propos de la formule (2), nous supposerons cette déformation définie en chaque point par la donnée du déplacement normal δn.

Considérons d'abord l'intégrale I, que nous prendrons sous la forme (7), les surfaces Σ et Σ_1 étant supposées fixes pendant que la surface S se déforme. La variation de I ne provient alors que de ce que la fonction de Green varie, sa variation étant donnée par la formule (2); en appliquant cette formule, la lettre M figurant déjà dans la formule (7), nous appellerons P au lieu de M le point qui décrit la surface S. Il vient ainsi

$$\delta I = \frac{1}{64\pi^3}\int_\Sigma\int_{\Sigma_1}\int_S \frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,\frac{d^2 g_{M_1}^P}{dn_1\,dn_P}\,\delta n_P\,dS\,d\Sigma\,d\Sigma_1$$

$$= \frac{1}{64\pi^3}\int_S \left[\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,d\Sigma\right]\left[\int_{\Sigma_1} \frac{d^2 g_{M_1}^P}{dn_1\,dn_P}\,d\Sigma_1\right]\delta n_P\,dS,$$

ou, en tenant compte de la formule (5) et écrivant de nouveau M au lieu de P,

$$\delta I = 4\pi\int_S \sigma^2\,\delta n\,dS. \tag{14}$$

On obtient de même les variations de J et de I′ :

$$\delta J = 4\pi\int_S \sigma\sigma'\,\delta n\,dS, \tag{15}$$

$$\delta I' = 4\pi\int_S \sigma'^2\,\delta n\,dS. \tag{16}$$

Les mêmes formules s'appliquent lorsque les surfaces S et S′ se déforment toutes les deux, les intégrales qui y figurent devant seulement être étendues à l'ensemble des deux surfaces.

Inégalités résultant des formules précédentes.

8. Considérons une déformation des surfaces S et S′ pour laquelle δn ne soit nulle part négatif, c'est-à-dire pour laquelle

chacune des surfaces déformées entoure la surface primitive correspondante. Il résulte des formules (14), (15) et (16), et des remarques des n°s 4 et 5 sur les signes des quantités σ, σ' et J, que

$$(17) \qquad \delta I > 0, \qquad \delta I' > 0, \qquad \delta J < 0, \qquad \delta |J| > 0.$$

Donc *les capacités électriques des surfaces* S *et* S′ *et leur coefficient d'influence mutuelle augmentent en valeur absolue si l'une ou l'autre de ces surfaces se déforme de manière que la surface déformée entoure la surface primitive.*

Il résulte en outre, des formules du n° 7 et des inégalités de Schwarz, que

$$(18) \qquad \delta I\, \delta I' - \delta J^2 > 0.$$

La variation de Δ s'écrit

$$\delta\Delta = I\,\delta I' + I'\,\delta I - 2J\,\delta J.$$

Le produit $J\,\Delta J$ est inférieur à la moyenne géométrique des deux premiers termes [en raison de l'inégalité (18) et du fait que J soit inférieur en valeur absolue à I et I′]; il l'est donc *a fortiori* à leur moyenne arithmétique, et ces deux termes déterminent le signe de $\delta\Delta$, qui est donc positif :

$$(19) \qquad \delta\Delta > 0.$$

Des formules (13) résulte que

$$\delta I_1 = \frac{I'^2\,\delta I - 2\,I'J\,\delta J + J^2\,\delta I'}{I'^2},$$

$$\delta I'_1 = \frac{I^2\,\delta I' - 2\,I\,J\,\delta J + J^2\,\delta I}{I^2}.$$

Les numérateurs de ces expressions sont des polynomes du second degré en J à racines imaginaires, d'après l'inégalité (18), et coefficients extrêmes positifs. On a donc

$$(20) \qquad \delta I_1 > 0, \qquad \delta I'_1 > 0.$$

Variation de σ et σ'.

9. Calculons d'abord la variation de la densité

$$\sigma_A = -\frac{1}{16\pi^2}\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^A}{dn_A\, dn_P}\, d\Sigma$$

(le point P décrivant la surface Σ) en un point A de la surface S′, pendant une déformation n'altérant que la surface S. Tenant compte de la formule (2), il vient

$$(21)\qquad \delta\sigma_A = \frac{1}{64\pi^3}\int_\Sigma\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,\delta n\,dS\,d\Sigma$$

$$= \frac{1}{64\pi^3}\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\left[\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,d\Sigma\right]\delta n\,dS,$$

ou, en tenant compte de la formule (5),

$$(22)\qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\sigma\,\delta n\,dS.$$

Ce calcul s'applique encore, et par suite la formule finale reste exacte, pour un point A d'une quelconque des surfaces S et S′ et pour une déformation de ces surfaces *n'altérant pas la région voisine de* P, l'intégration devant seulement être étendue à l'ensemble des surfaces S et S′.

10. Si cette condition n'est pas remplie, le calcul devient plus compliqué. Supposons d'abord que A soit sur S et que cette surface se déforme seule.

1° Il faut tenir compte de ce que A varie quand la surface S se déforme; nous définirons parfaitement le déplacement de ce point en le supposant normal à la surface; il a alors la valeur δn_A (valeur de δn quand M vient en A).

Il en résulte dans la variation de σ_A le terme

$$-\frac{1}{16\pi^2}\,\delta n_A\int_\Sigma \frac{d^3 g_P^A}{dn_A^2\,dn_P}\,d\Sigma.$$

Or, du fait que $\frac{dg_P^A}{dn_P}$ soit une fonction de A harmonique et s'annulant sur la surface S, résulte que, K_A désignant la courbure moyenne de la surface en A,

$$\frac{d^3 g_P^A}{dn_A^2\,dn_P} = K_A\,\frac{d^2 g_P^A}{dn_A\,dn_P}.$$

Le terme considéré s'écrit donc

$$(23) \qquad -\frac{1}{16\pi^2} K_A \delta n_A \int_\Sigma \frac{d^2 g_P^A}{dn_A\, dn_P} d\Sigma = K_A \sigma_A \delta n_A.$$

2° Il faut tenir compte de ce que la direction de la normale à la surface en A, qui intervient dans le symbole $\frac{d}{dn_A}$, varie. La fonction $\frac{dg_P^A}{dn_P}$ s'annulant quand A vient sur la surface S, on voit aisément que cette circonstance, qui paraît devoir intervenir, est en réalité sans influence sur la variation de σ_A.

3° La variation de forme de la fonction $\frac{d^2 g_P^A}{dn_A dn_P}$ (indépendamment de la variation des arguments de cette fonction) n'est donnée par la formule (2) dérivée que pour un point A extérieur aux surfaces S et S', ou pour un point de ces surfaces dans le voisinage duquel δn soit nul. Si A est sur la surface S et que δn n'y soit pas nul, la fonction intégrée dans la formule (23) est infiniment grande du troisième ordre quand M vient en A (la distance AM étant prise comme infiniment petit du premier ordre); l'intégrale considérée est donc dépourvue de sens.

Pour avoir la variation cherchée, il faut remplacer A par un point B de la normale en A extérieur à la surface, former la variation de $\frac{d^2 g_P^B}{dn_A dn_P}$, puis faire tendre B vers A [1]. Tenant compte du terme calculé ci-dessus [formule (23)], il vient

$$(24) \qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi} \lim_{B \to A} \int_S \frac{d^2 g_M^B}{dn\, dn_A} \sigma\, \delta n\, dS + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Cette expression se réduit à l'expression (22) lorsque δn s'annule en A ainsi que ses dérivées premières; dans ce cas en effet les fonctions intégrées dans les différentes formules écrites ne sont plus que des infiniment grands du premier ordre, et cela n'empêche pas les intégrales de surfaces considérées d'être absolument

---

[1] Nous écrivons dn_A et non dn_B pour indiquer que la direction considérée, bien qu'il s'agisse d'une fonction du point B, est celle de la normale à la surface en A.

et uniformément convergentes, de sorte qu'il n'y a aucune difficulté sur la légimité des calculs.

Dans le cas général, nous pourrons trouver une expression plus commode de $\delta\sigma_A$. Remplaçons d'abord $\sigma\delta n$ par

$$\sigma_A \delta n_A + (\sigma\delta n - \sigma_A \delta n_A).$$

L'intégrale obtenue en considérant le premier terme se calcule sans difficulté. En nous reportant à la formule (4), dans laquelle nous pouvons supposer l'axe des x parallèle à la normale à la surface S en A, nous voyons que le coefficient de $\sigma_A \delta n_A$ n'est autre que la valeur de X en B. Quand B tend vers A il tend vers $4\pi\sigma_A$. Donc

$$(25)\quad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi}\lim_{B\to A}\int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A}(\sigma\delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS + 4\pi\sigma_A^2 \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Introduisons maintenant la notion de *valeur principale d'une intégrale*. Divisons la surface S en deux régions, S_1 et S_2, cette dernière voisine de A et se projetant sur le plan tangent en A à l'intérieur d'un cercle de centre A et de rayon R, la première comprenant le reste de la surface. Si la fonction intégrée devient infinie en A, nous appellerons « valeur principale d'une intégrale prise sur la surface S » la limite, si elle existe, de l'intégrale prise sur la région S_1 lorsque R tend vers zéro.

Il est facile d'établir que

$$(26)\qquad \int_{S_1} \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A}(\sigma\delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS$$

tend vers zéro avec R, et cela uniformément quel que soit le point B voisin de A sur la normale à la surface. Cela résulte de ce que la fonction intégrée, étant un infiniment grand d'ordre 2 au plus, prend en deux points dont les projections sur le plan tangent en A sont symétriques par rapport à A des valeurs égales et de signes contraires à un infiniment grand près d'ordre 1. La somme de deux éléments correspondants de l'intégrale a donc une limite supérieure de la forme

$$\frac{C}{BM}\, dy\, dz < \frac{C}{AM}\, dy\, dz,$$

y et z étant des coordonnées rectangulaires dans le plan tangent

en A, et C une constante positive. Cela conduit, pour l'intégrale (26), à la limite supérieure πCR, valable quel que soit le point B sur la normale en A.

En nous donnant une quantité très petite ε, choisissons R de manière que

$$\pi C R \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les régions S_1 et S_2 étant ainsi bien déterminées, il est évident que pour B assez près de A, la différence

$$\int_{S_1} \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS$$

est inférieure en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\left| \int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS \right| \leqq \varepsilon$$

et, par suite,

$$\left| \lim_{B \to A} \int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS \right| \leqq \varepsilon.$$

Cette différence, qui ne dépend plus de B, tend donc vers zéro avec R. Il en résulte que la formule (25) peut s'écrire

$$(27) \quad \delta \sigma_A = -\frac{1}{4\pi} \text{val.pr.} \int_S \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS + 4\pi \sigma_A^2 \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Bien entendu, si la surface S′ se déforme en même temps que S, il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$(27') \qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} \sigma \delta n\, dS.$$

11. On traiterait de même le cas où le point A est sur la surface S′. En supposant d'abord que la surface S′ se déforme seule, il vient

$$(28) \qquad \delta \sigma_A = -\frac{1}{4\pi} \text{val.pr.} \int_{S'} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS$$
$$+ 4\pi \sigma_A \sigma'_A \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Si la surface S se déforme en même temps que S', il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$(28') \qquad -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}\,\sigma\,\delta n\, dS.$$

La variation de σ'_A se déduit des formules précédentes en permutant le rôle des surfaces S et S'.

Il est aisé de déduire de ces formules une nouvelle démonstration des formules du n° 7. Pour l'intégrale I, par exemple, on a

$$I = \int_S \sigma_A\, dS_A,$$

d'où

$$\delta I = \int_S (\delta\sigma_A\, dS_A + \sigma_A \delta\, dS_A) = \int_S (\delta\sigma_A - K_A \sigma_A \delta n_A)\, dS_A.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'en remplaçant $\delta\sigma_A$ par sa valeur déduite des formules (27 et (27'), on retrouve bien la formule (14).

Inégalités résultant de la formule (22).

12. La formule (22), qui donne la variation de σ_A lorsque δn s'annule au point A et dans son voisinage, peut être appliquée dans quatre cas distincts :

1° La déformation portant sur une partie de la surface S et A étant sur le reste de la surface;

2° La déformation portant sur tout ou partie de la surface S et A étant sur la surface S';

3° La déformation portant sur tout ou partie de la surface S' et A étant sur la surface S;

4° La déformation portant sur une partie de la surface S' et A étant sur le reste de la surface.

En supposant comme au n° 8 que δn ne soit jamais négatif, il résulte immédiatement de la formule (22) et des résultats du n° 4 sur le signe de la densité σ, que l'on a :

Pour le premier cas :

$$\delta\sigma_A < 0, \qquad \delta|\sigma_A| < 0;$$

pour le deuxième cas :

$$\delta\sigma_A < 0, \qquad \delta\,|\,\sigma_A\,| > 0;$$

pour le troisième cas :

$$\delta\sigma_A > 0, \qquad \delta\,|\,\sigma_A\,| > 0;$$

pour le quatrième cas :

$$\delta\sigma_A > 0, \qquad \delta\,|\,\sigma_A\,| < 0.$$

On aurait de même des inégalités analogues pour la densité σ'.

On peut résumer ces inégalités en disant que toute déformation portant sur une des deux surfaces et la remplaçant par une surface déformée qui ne soit nulle part intérieure à la surface primitive, et pendant laquelle les quantités d'électricité réparties sur les surfaces sont modifiées de manière à laisser le potentiel constant sur une des surfaces et constamment nul sur l'autre, la densité électrique augmente partout en valeur absolue sur celle des surfaces qui ne se déforme pas et diminue partout en valeur absolue sur les parties de la surface déformée qui ne sont pas atteintes par la déformation.

La dernière partie de cet énoncé s'applique en particulier au cas d'une surface unique.

Dans ce cas, pour la déformation considérée pour laquelle δn est nul en certains points et positif en d'autres, mais n'est nulle part négatif, mais en nous plaçant maintenant dans l'hypothèse que la charge électrique soit égale à l'unité et non plus le potentiel, il est intuitif, en raison de la propriété de l'électricité de se porter vers les parties saillantes des conducteurs, que l'électricité se porte vers les parties de la surface qui se déforment, et qu'en conséquence sa densité diminue sur le reste de la surface.

Cela revient à dire que sur ces parties

$$\delta\mu < 0,$$

en appelant μ la densité électrique dans cette nouvelle hypothèse.

Non seulement cette inégalité résulte d'une manière rigoureuse de ce qui précède, mais nous en déduisons même une inégalité d'où elle résultera *a fortiori*.

En effet, on a évidemment

$$\sigma = I\mu$$

et, par suite,

$$-\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta\sigma}{\sigma} > \frac{\delta l}{l} > 0,$$

puisque $\delta\sigma$, dans le cas considéré, est négatif, et que δl est positif.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU PROBLÈME DANS LE PLAN.

Formules générales concernant la distribution sur une courbe fermée d'une simple couche donnant lieu à un potentiel constant à l'intérieur.

13. On sait l'analogie presque absolue qui existe entre les théories relatives au problème de Dirichlet intérieur dans le cas de l'espace et dans le cas du plan, à condition de remplacer, quand on passe de l'espace au plan, le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$ par le potentiel logarithmique $\log\frac{1}{r}$.

Pour le problème de Dirichlet extérieur, l'analogie est grande également, mais il y a une différence essentielle qu'il faut commencer par rappeler : dans l'espace, pour définir une fonction harmonique régulière à l'extérieur d'une surface S et à l'infini, il faut se donner ses valeurs sur la surface S et sa valeur à l'infini; dans le plan, au contraire, pour définir une fonction harmonique régulière à l'extérieur d'une courbe fermée C et à l'infini, il suffit de se donner ses valeurs sur la courbe C: elle est alors définie par la formule

$$f(A) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn} f(M)\,ds, \tag{29}$$

g_B^A désignant la fonction de Green relative au problème considéré, et a à l'infini une valeur bien déterminée, la fonction $\frac{dg_M^A}{dn}$ ayant aussi une limite bien déterminée quand, le point M restant fixe sur la courbe C, A s'éloigne à l'infini.

La raison de cette différence se comprend aisément quand on observe qu'à l'aide d'une transformation par inversion on

peut passer de la solution du problème intérieur à celle du problème extérieur. D'une manière générale, dans l'espace à p dimensions, une fonction harmonique donne, après inversion, une fonction dont le produit par $\frac{1}{r^{p-2}}$ est harmonique (r désignant la distance au centre d'inversion O), c'est-à-dire que, A et A′ étant les deux points qui se correspondent, et si l'on pose

$$f(A') = \varphi(A),$$

les fonctions $f(A')$ et $\frac{1}{OA^{p-2}}\varphi(A)$ sont en même temps harmoniques.

A l'ensemble des fonctions $f(A')$ harmoniques et régulières à l'intérieur d'une courbe C′, dans le cas du plan, correspond donc l'ensemble des fonctions $\varphi(A)$ harmoniques et régulières à l'extérieur de la courbe inverse C et à l'infini. Au contraire, dans l'espace, à l'ensemble des fonctions $f(A')$ harmoniques et régulières à l'intérieur d'une surface S′, correspond l'ensemble des fonctions $\frac{1}{OA}\varphi(A)$, harmoniques et régulières à l'extérieur de la surface inverse S *et s'annulant à l'infini* comme un potentiel. Cette différence explique bien la circonstance signalée plus haut.

Rappelons encore que la formule (29), dans le cas où la fonction f se réduit à une constante, donne la relation

$$(30) \qquad 1 = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\,ds,$$

qu'on peut appliquer en particulier lorsque le point A est à l'infini. Dans l'espace, l'intégrale correspondante ne serait pas constante, mais s'annulerait à l'infini.

14. Si nous abordons l'étude des fonctions représentables à l'extérieur par un potentiel de simple couche, nous trouvons (à l'inverse de ce qui a lieu dans l'espace) que l'ensemble de ces fonctions ne coïncide pas avec celui des fonctions représentables par l'intégrale (29).

En effet, une fonction devenant infinie à l'infini peut être représentable par un potentiel de simple couche, à condition que la différence entre cette fonction et $C\log\frac{1}{r}$ (C désignant une

constante convenable et r la distance à un point fixe), non seulement reste finie, mais même s'annule à l'infini.

Il en résulte que le potentiel résultant d'une couche qui donne à l'intérieur un potentiel constant ne peut être défini à l'extérieur par la formule (29) et que la méthode du n° 3 ne s'applique pas ici.

Nous désignerons par σ la densité d'une pareille couche si le potentiel constant à l'intérieur est égal à l'unité, et nous la désignerons par μ si c'est la masse totale qui est égale à l'unité. Il est évident que, comme nous l'avons déjà écrit au n° 12 pour le problème de l'espace,

$$\sigma = \mathrm{I}\mu, \tag{31}$$

I désignant toujours la capacité (rapport de la masse au potentiel, rapport bien défini dans le cas, que nous considérerons surtout, d'une courbe fermée unique).

Considérons deux courbes homothétiques C et C', et soit k le rapport d'homothétie de la première à la seconde. Les valeurs de $\mu\, ds$ pour des éléments correspondants de ces courbes sont les mêmes, et il en résulte aisément qu'il y a entre les potentiels à l'intérieur la relation

$$\mathrm{U} - \mathrm{U}' = \frac{1}{\mathrm{I}} - \frac{1}{\mathrm{I}'} = \log \frac{1}{k}.$$

Si donc on considère une famille de courbes homothétiques croissantes, la capacité, d'abord très petite, augmente et devient infinie pour une des courbes, puis prend des valeurs négatives, d'abord très grandes en valeur absolue, puis décroissant en valeur absolue pour tendre vers zéro quand k devient très grand.

Pour la courbe à capacité infinie (par exemple pour la circonférence de rayon 1), il existe une couche de densité non nulle donnant à l'intérieur un potentiel nul, et il n'existe aucune couche donnant à l'intérieur un potentiel constant non nul. Pour cette courbe, d'une manière générale, le problème de déterminer une couche donnant à l'intérieur un potentiel égal à une fonction harmonique donnée est soumis à une condition de possibilité, et si cette condition est remplie la solution est indéterminée.

15. Montrons maintenant comment les quantités μ, σ, I se

rattachent à la fonction de Green par des formules plus simples que dans le cas de l'espace.

Nous appellerons r la distance AB et ρ la distance MB, M étant un point de la courbe C.

Considérons la fonction

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\log\frac{1}{\rho}\,ds,$$

qui, d'après la formule (29), est une fonction harmonique du point A, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, prenant sur C la valeur $\log\frac{1}{r}$. Pour distinguer nettement les cas où B est soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de la courbe C, nous l'appellerons h_B^A dans le premier cas et H_B^A dans le second; le point A sera toujours extérieur à C ou à la limite sur cette courbe.

On a, par définition même de la fonction de Green,

$$g_B^A = \log\frac{1}{r} - h_B^A;$$

les propriétés de cette fonction sont bien connues.

Posons de même

$$(33) \qquad G_B^A = \log\frac{1}{r} - H_B^A.$$

La différence

$$G_B^A - G_{B'}^A,$$

B et B′ étant deux points intérieurs à C, est une fonction de A, harmonique, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, et nulle sur C. Elle est donc nulle, et nous pouvons écrire

$$(34) \qquad G_B^A = G_{B'}^A = G(A),$$

et par suite, en tenant compte de la formule (33),

$$H_B^A - H_{B'}^A = \log\frac{r'}{r}.$$

Si le point A s'éloigne à l'infini, le second membre tend vers zéro. Donc H_B^A, dont nous savons déjà qu'il tend vers une limite, tend vers une limite H indépendante de B.

L'expression (32), le point A étant à l'infini, et considérée

comme fonction de B, est un potentiel de simple couche; d'après ce qui précède, il a à l'intérieur de C une valeur constante H, et d'après la formule (30) la masse totale est égale à l'unité. La densité de cette couche est donc la densité μ que nous nous proposions de déterminer, et l'on a

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2\pi}\frac{dg_M^\infty}{dn}, \\ I &= \frac{1}{H}, \\ \sigma &= I\mu = \frac{\mu}{H}, \end{aligned}\right.$$

et le potentiel résultant de la couche de densité μ a à l'extérieur la valeur h_B^∞ que nous écrirons plus simplement $h(B)$.

Le problème posé est donc résolu; quelques remarques seront encore utiles.

La fonction

$$G(A) + H = \log\frac{1}{r} - H_B^A + H$$

est une fonction harmonique de A, égale sur C à H, et dont la différence avec $\log\frac{1}{r}$ est nulle à l'infini; elle nous donne donc une nouvelle expression du potentiel $h(A)$

$$(36)\qquad G(A) + H = h(A).$$

En observant que la force normale en un point A, situé sur la normale en M, et tendant vers M, tend vers $2\pi\mu$, on a

$$(37)\qquad 2\pi\mu = -\frac{dG(M)}{dn} = -\frac{dG_B^M}{dn},$$

ce qui nous donne une nouvelle expression de μ.

Variation de I.

16. La courbe C se déformant, nous appellerons C′ la courbe déformée, et G′ et H′ les fonctions analogues à G et H relatives à C′. La déformation de la courbe C sera définie par la donnée en chaque point du déplacement normal δn.

D'après les formules (33) et (34), on a

$$(38) \qquad \delta G(A) = G'(A) - G(A) = H_B^A - H'^A_B = -\delta H_B^A.$$

Cette variation est évidemment une fonction harmonique de A, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, et prenant sur C la valeur

$$-\frac{dG(M)}{dn}\delta n.$$

La formule (29) nous donne alors

$$(39) \qquad \delta G(A) = -\delta H_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\frac{dG(M)}{dn}\delta n\, ds.$$

Supposant le point A à l'infini, et tenant compte des formules (35) et (37), il vient

$$(40) \qquad \delta H = -2\pi\int_C \mu^2\,\delta n\, ds$$

et

$$(41) \qquad \delta I = 2\pi\int_C \sigma^2\,\delta n\, ds.$$

On remarque l'analogie absolue de cette formule et de la formule (14) obtenue dans le cas de l'espace, analogie que laissait peu prévoir la différence entre les formules du n° 15 pour définir I et les formules du n° 3 obtenues dans le cas du plan.

Il résulte aussi des différentes formules écrites que μ est positif et que, comme dans le cas du plan, δI est positif si δn est partout positif ou nul. Mais, à cause de la discontinuité de I, nous ne pouvons plus affirmer que I est plus grand pour la courbe enveloppante que pour la courbe enveloppée; la quantité inverse H n'étant pas discontinue, ce que nous pouvons affirmer c'est que H est plus petit, algébriquement, pour la courbe enveloppante que pour la courbe enveloppée.

Variation de μ.

17. Cette variation résulte des formules (37) et (39). En supposant d'abord que A soit un point de la courbe C dans le voisinage duquel δn soit nul, ou au moins où cette quantité soit

infiniment petite du second ordre, il vient

$$\delta\mu_A = \frac{1}{4\pi^2}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\frac{d\,G(M)}{dn}\,\delta n\,ds$$

ou encore

$$(42)\qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\mu\,\delta n\,ds.$$

Cette formule est analogue à la formule (22). La formule qui donnerait la variation de σ, facile à déduire de celles qui donnent les variations de I et de μ, serait un peu plus compliquée.

On voit ainsi, malgré l'analogie des formules (14) et (41), que les formules analogues à celles qui donnent les variations de I et de σ dans l'espace s'obtiennent, dans le cas du plan, non en considérant les quantités I et σ, mais les quantités H et μ.

Cela n'est pas très surprenant si l'on constate que, des deux manières, en quelque sorte inverses, de poser le problème de la détermination d'une couche donnant à l'intérieur un potentiel constant, soit en se donnant la valeur de ce potentiel, soit en se donnant la masse totale, c'est la première qui paraît la plus simple dans le cas de l'espace, et c'est au contraire la seconde dans le cas du plan.

Nous pouvons étendre la formule (42), comme nous l'avons fait pour la formule (22), au cas où δn est quelconque. La seule différence essentielle provient de ce que l'intégrale

$$(43)\qquad \int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,ds$$

est nulle, à cause de la formule (30); l'intégrale correspondante, dans le cas de l'espace, prend la valeur $4\pi\sigma_A$ lorsque A tend vers un point de la surface S, et il en résultait dans les formules (25) et (27) le terme $4\pi\sigma_A^2\,\delta n_A$. Dans le plan le terme correspondant est nul. En faisant le calcul, on trouve successivement les formules

$$(44)\qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to A}\int_C \frac{d^2 g_M^B}{dn\,dn_A}\,\mu\,\delta n\,ds + k_A\,\mu_A\,\delta n_A$$

et

$$(45)\qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\,\text{val. pr.}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}(\mu\,\delta n - \mu_A\,\delta n_A)\,ds + k_A\,\mu_A\,\delta n_A.$$

k_A désignant la courbure de la courbe C en A.

De cette expression, on peut, à titre de vérification, déduire la variation de l'intégrale

$$\int_C \mu\, ds = 1,$$

variation qui doit évidemment être nulle. En faisant le calcul, et en le comparant à celui qui a été indiqué à la fin du n° 11, on s'explique bien pourquoi le terme $4\pi\sigma_A^2\,\delta n_A$, qui figure dans la formule (27) et conduit dans l'intégration au seul terme non nul dans l'expression de δI, ne se retrouve pas dans la formule (45), qui donne la variation de μ, et non de σ.

Comme dans le cas de l'espace, si nous considérons une déformation pour laquelle δn soit partout positif ou nul, la formule (42) nous montre que $\delta\mu$ est négatif dans les régions de la courbe où δn est nul. Mais nous ne pouvons pas affirmer, comme dans le cas de l'espace, que $\delta\sigma$ soit négatif. Du moins cela ne paraît pas résulter simplement des formules écrites.

CHAPITRE III.

L'INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES DU CHAPITRE II.

Énoncé du problème traité.

18. La variation de la fonction de Green est, comme on sait, donnée par la formule

$$\delta g_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\,\frac{dg_B^M}{dn}\,\delta n\, ds. \tag{46}$$

Les équations (46), (44) et (40) sont ce qu'on appelle des *équations aux dérivées fonctionnelles*. Les fonctions g_B^A, μ, et la quantité H, sont entièrement déterminées par ces équations, et par leurs valeurs pour un contour particulier C_0, puisque, le contour se déformant d'une manière continue, elles définissent à chaque instant les variations de ces quantités.

Il peut être intéressant de chercher si ce système de trois équations admet d'autres solutions, que nous désignerions par Φ_B^A, u et $\mathfrak{H}$, et si même il existe des solutions prenant pour le contour C_0 des valeurs arbitrairement données.

Malgré l'analogie de ces équations et des équations différentielles, cela n'est pas certain *a priori*, car les expressions de $\delta\Phi_B^A$, δu et $\delta\mathfrak{H}$ qui résultent de ces équations peuvent n'être pas des *différentielles exactes*, de sorte que les valeurs de ces fonctions trouvées pour un contour C peuvent dépendre du mode de déformation du contour entre C_0 et C. C'est même *a priori* la circonstance qui paraît le plus vraisemblable, et en général il n'existe pas de solution d'une équation aux dérivées fonctionnelles prenant pour un contour particulier une valeur quelconque. En d'autres termes, les équations pour lesquelles il existe des solutions prenant pour le contour C_0 des valeurs arbitrairement données, équations qui sont dites *complètement intégrables*, sont une exception.

Mais les problèmes de physique mathématique conduisent souvent à des équations complètement intégrables, ce qui s'explique par le fait que le problème qui conduit à une équation met souvent en évidence une infinité de solutions de cette équation, et souvent le degré de généralité des solutions ainsi obtenues est suffisant pour constituer l'intégrale générale d'une équation complètement intégrable.

Le système que nous nous proposons d'étudier se présente sous une forme particulièrement simple, l'équation (46) ne contenant que la fonction de Green, l'équation (44) introduisant ensuite la fonction μ et l'équation (40) la quantité H.

Nous pouvons donc étudier successivement ces trois équations. En ce qui concerne l'équation (46), nous l'avons déjà étudiée dans notre Thèse [1], et nous allons d'abord rappeler les résultats obtenus.

Intégrabilité de l'équation (46).

19. En remplaçant g_B^A par la fonction inconnue Φ_B^A, cette équation s'écrit

$$\delta\Phi_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_M^A}{dn}\frac{d\Phi_B^M}{dn}\,\delta n\,ds. \tag{47}$$

Observons d'abord que cette équation est vérifiée, lorsque la

---

[1] Paris, 1911, et *Journal de l'École Polytechnique*, 1912 (*voir* n°s 30 et 32).

courbe C se déforme, non seulement par la fonction de Green relative à toute la région du plan extérieure à cette courbe, mais par la fonction de Green relative à la région extérieure à cette courbe et à une autre courbe fixe C'. Cette solution présente un assez grand degré de généralité.

Quelle que soit la courbe C', la solution considérée est une fonction harmonique, s'annulant lorsqu'un des points dont elle dépend vient sur la courbe C, et symétrique par rapport à ces deux points. La solution générale de l'équation (17) est beaucoup plus générale; mais cette équation n'est pas complètement intégrable, et des conditions doivent êtres imposées à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A pour un contour particulier, pour qu'à cette valeur corresponde une solution de l'équation (17).

La forme de ces conditions dépend essentiellement des singularités de la fonction Φ_B^A. Dans notre Thèse nous avons étudié deux cas :

1° Le cas d'une fonction sans singularité lorsque les deux points A et B sont dans le voisinage du contour C;

2° Le cas d'une fonction de la forme

$$\Phi_B^A = g_B^A + \varphi_B^A, \tag{48}$$

φ_B^A étant une fonction sans singularité lorsque les deux points A et B sont dans le voisinage du contour C.

Dans le premier cas, la condition à imposer à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A, pour qu'à cette valeur corresponde une solution de l'équation (17), est que cette fonction soit :

ou une fonction d'un seul des points A et B;

ou une fonction de $x + iy$ et $x_1 - iy_1$, x et y désignant les coordonnées d'un des points A et B, x_1 et y_1 celles de l'autre.

Dans le deuxième cas, la condition à imposer à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A est que

$$\frac{d\Phi_M^A}{ds} = \frac{d\Phi_A^M}{ds} = 0, \tag{49}$$

M désignant un point du contour et s la valeur de la longueur

d'arc en ce point. Cela revient à dire que Φ_M^A et Φ_A^M ne dépendent que de A, et non du point M du contour.

Cette deuxième catégorie de solutions est évidemment plus intéressante au point de vue des relations entre l'équation (47) et les problèmes de physique mathématique. Nous ne considérerons dans la suite que ces solutions, de sorte que Φ_B^A sera une solution de l'équation (47), qui, pour un contour quelconque, sera de la forme (48), et vérifiera les conditions (49).

20. En remplaçant g_B^A par Φ_B^A et μ par la fonction inconnue u, l'équation (44) s'écrit

$$(50) \qquad \delta u_A = -\frac{1}{2\pi} \lim_{B \to A} \int_C \frac{d^2 \Phi_M^B}{dn\, dn_A} u\, \delta n\, ds + k_A u_A\, \delta n_A.$$

On remarque dans cette formule que la fonction Φ n'intervient que par les valeurs *sur le contour* de la dérivée normale

$$(51) \qquad \frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A};$$

on le voit nettement en remarquant que l'intégrale de la formule (50) peut s'écrire

$$\lim_{B \to A} \int_C \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} u\, \delta n\, ds + \int_C \frac{d^2 (\Phi_A^M - g_A^M)}{dn\, dn_A} u\, \delta n\, ds.$$

Dans ces conditions, afin de ne pas faire intervenir dans l'étude de l'équation (50) la fonction Φ_B^A, mais seulement l'expression (51), il y a lieu d'examiner si, sans faire intervenir d'autres renseignements concernant la fonction Φ_B^A, on peut définir la variation de cette expression lorsque le contour se déforme.

Distinguons dans ce but, lorsque M et A sont sur le contour, les variations

$$\delta \frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A}$$

et

$$\delta_1 \frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A},$$

la première de ces notations étant relative au cas où l'on considère

que, la courbe C se déformant, les points A et M restent fixes et les directions dn et dn_A également, tandis que la seconde est relative au cas où A et M restent sur la courbe C pendant que cette courbe se déforme, en décrivant une trajectoire orthogonale à cette courbe, et où dn et dn_A désignent les éléments des normales en M et A à la courbe déformée ([1]).

Les relations (49) entraînent comme conséquence que $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ ne varie pas pour une rotation infiniment petite, à partir de leur position initiale, des directions dn et dn_A. La différence entre les variations δ et δ_1 est donc donnée par la formule

$$(52)\qquad \delta_1 \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} + \frac{d^3\Phi_A^M}{dn^2\,dn_A}\,\delta n + \frac{d^3\Phi_A^M}{dn\,dn_A^2}\,\delta n_A .$$

Or de l'équation (47) il résulte immédiatement que la variation δ est parfaitement définie par la donnée des valeurs initiales de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$; cette équation donne en effet, en tenant compte aussi de la formule (48),

$$(53)\qquad \delta \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta \frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A} - \frac{1}{2\pi} \lim_{P \to M} \int_C \frac{d^2 g_{M'}^P}{dn\,dn'} \frac{d^2 \varphi_A^{M'}}{dn'\,dn_A}\,\delta n'\,ds'$$

$$- \frac{1}{2\pi} \lim_{B \to A} \int_C \frac{d^2 \varphi_{M'}^M}{dn\,dn'} \frac{d^2 g_B^{M'}}{dn\,dn_A}\,\delta n'\,ds'$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{d^2 \varphi_{M'}^M}{dn\,dn'} \frac{d^2 \varphi_A^{M'}}{dn'\,dn_A}\,\delta n'\,ds',$$

et, g_B^A étant supposé connue, cela revient au même de se donner $\frac{d^2\varphi_A^M}{dn\,dn_A}$ ou $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$.

Dans le cas où Φ_B^A est une fonction harmonique des points A et B,

---

([1]) Nous aurions pu déjà introduire cette distinction dans les chapitres précédents et en particulier au n° 9. Mais cela n'était pas indispensable, car aucune ambiguïté n'était à craindre. Il est bien évident que, lorsque nous parlions de la variation de σ ou de μ, il ne pouvait s'agir que de la variation que nous désignons maintenant par le symbole δ_1.

il résulte des conditions (49) que

$$\frac{d^3\Phi_A^M}{dn^2\,dn_A} = k\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}, \qquad \frac{d^3\Phi_A^M}{dn\,dn_A^2} = k_A\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A},$$

M et A étant sur le contour, et k et k_A désignant les valeurs de la courbure en ces deux points. La formule (52) s'écrit donc

$$(54) \qquad \delta\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} + \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}\,(k\,\delta n + k_A\,\delta n_A).$$

Cette formule et la formule (53) montrent que, si l'on ajoute aux hypothèses faites au n° 19 sur la fonction Φ_B^A celle d'être une fonction harmonique des deux points A et B, la connaissance des valeurs de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ pour un contour initial et pour les points du contour, entraîne la connaissance des valeurs de la même expression pour un contour quelconque.

D'ailleurs ces hypothèses n'empêchent pas la valeur initiale de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ d'être quelconque, à la restriction près d'être la somme de $\frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A}$ et d'une fonction régulière. En effet, il existe une fonction harmonique Φ_B^A des points A et B, ayant la même singularité que g_B^A, s'annulant lorsqu'un de ces points vient sur le contour et telle que $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ prenne sur le contour la valeur considérée. Cette fonction vérifie toutes les conditions du n° 19; à cette valeur initiale correspond donc, lorsque le contour se déforme, une solution de l'équation (47), et par suite la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ est bien celle qui résulte des formule (53) et (54).

Donc, bien que l'équation (47) ne soit pas complètement intégrable, l'équation qui donne la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$, qui résulte de l'élimination de $\delta\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ entre les formules (53) et (54), est complètement intégrable pour les fonctions ayant la même singularité que $\frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A}$.

21. Dans le cas où la fonction Φ_B^A n'est pas harmonique, il faut évidemment, au second membre de la formule (54), ajouter les termes

$$\Delta_M \frac{d\Phi_A^M}{dn_A}\delta n + \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn}\delta n_A.$$

Pour que ce terme soit nul, et que par suite la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ soit la même que dans le cas précédent, il faut que

$$\Delta_M \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} = \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} = 0,$$

et pour que cette condition reste réalisée quand le contour se déforme, la variation de Φ étant donnée par la formule (47), on voit aisément qu'il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée, non seulement pour des points A et M du contour, dn_A et dn désignant des éléments de normales au contour, mais pour des points quelconques et des directions quelconques; en d'autres termes $\Delta_A \Phi_B^A$ doit ne dépendre que de A et $\Delta_B \Phi_B^A$ ne dépendre que de B.

Si cette condition n'est pas réalisée, la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ n'est pas la même que dans le cas précédent. On peut dire qu'elle est donnée par une équation aux dérivées fonctionnelles différente de celle qui résulte des formules (53) et (54), équation qui paraît surtout intéressante à envisager.

Nous allons maintenant étudier l'intégrabilité de l'équation (50) en nous plaçant successivement dans les deux hypothèses.

Intégrabilité de l'équation (50).

22. Faisons d'abord sur Φ_B^A les hypothèses suivantes :

1° Être une solution de l'équation (47);

2° Avoir même singularité que g_B^A;

3° S'annuler lorsqu'un des points A et B vient sur le contour;

4° Être une fonction harmonique de B (mais non nécessairement de A, de sorte que nous envisageons ici un cas un peu plus général que celui du n° 20; la fonction $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ peut ici être choisie

arbitrairement pour un contour initial, à la seule condition d'avoir même singularité que $\frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$, et sa variation lorsque le contour se déforme dépend des valeurs de $\Delta_A \Phi_B^A$.

Toutes ces conditions, supposées réalisées pour un contour initial, restent réalisées lorsque le contour se déforme.

Dans ces conditions, on vérifie aisément que l'équation (50) est vérifiée par la fonction

$$\frac{d\Phi_A^F}{dn_A},$$

F étant un point fixe quelconque, du moins dans la région voisine de la courbe C dans laquelle la fonction Φ_B^A est supposée régulière.

A cause de la forme linéaire et homogène de l'équation (50), cette équation est également vérifiée par la fonction

$$(55) \qquad u_A = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(M) \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} ds,$$

Γ étant une courbe décrite par le point M, ds la longueur de l'arc de cette courbe, et $f(M)$ une fonction quelconque.

Nous allons montrer que, lorsque la courbe C tend vers la courbe Γ, cette fonction u tend vers $f(A)$, c'est-à-dire vers une fonction quelconque de A. Il en résultera que l'équation (50) est complètement intégrable, et que la formule (55) en donne l'intégrale générale.

Il faudra seulement supposer que la courbe Γ a sa courbure partout finie. La fonction $\frac{d\Phi_A^M}{dn_A}$ a alors même singularité que $\frac{dg_A^M}{dn_A}$ et, par suite, d'après les propriétés connues de cette fonction, que $2\frac{d}{dn_A}\log\frac{1}{AM}$. L'intégrale (55) est alors discontinue au moment du passage à la limite comme la dérivée normale du potentiel dû à une couche de densité $\frac{1}{\pi} f(M)$ étalée sur la courbe Γ. De cette circonstance, et du fait que $\frac{d\Phi_A^M}{dn_A}$ s'annule quand M est sur C, résulte que la limite cherchée a la valeur $f(A)$, comme nous voulions l'établir.

Donc nous avons montré que l'équation (50) est complètement intégrable; nous avons même obtenu un résultat plus complet en formant l'intégrale qui, pour un contour particulier Γ, prend la valeur $f(A)$.

23. Examinons maintenant le cas où Φ_B^A n'est pas une fonction harmonique du point B.

L'équation (50) n'est plus complètement intégrable, en général. Pour le voir nous devons former la condition d'intégrabilité.

D'après un résultat connu [1], cette condition se forme de la manière suivante :

Considérant une déformation de la courbe C dépendant de deux paramètres λ et μ, et définissant les symboles δ_1, δ_2, δ^2 par les formules

$$\delta_1(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\ldots)\,d\lambda, \qquad \delta_2(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\mu}(\ldots)\,d\mu,$$

$$\delta^2(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}(\ldots)\,d\lambda\,d\mu;$$

il faut déduire des équations (47) et (50) l'expression de $\delta^2 u$, et écrire que l'expression

$$\delta^2 u + \frac{du}{ds}\frac{d\delta_1 n}{ds}\delta_2 n \tag{56}$$

dépend symétriquement des fonctions δn et $\delta_1 n$.

Le calcul peut se faire aisément. Mais l'on évite presque tout calcul en remarquant que, d'après le n° 22, nous savons que cette condition est sûrement vérifiée lorsque Φ_B^A est une fonction harmonique du point B. Or, d'après le n° 21, on passe de ce cas au cas général, envisagé ici, en ajoutant à l'expression de

$$\delta_1 \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$$

le terme

$$\Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn}\delta_1 n_A$$

---

[1] *Voir* n° 11 de notre Thèse, déjà citée, ou n° 3 de notre Mémoire *Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1914, 1er semestre).

ce qui revient à ajouter à l'expression (56) le terme

$$(57) \qquad -\frac{1}{2\pi}\delta_1 n_A \int_C \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} u\,\delta_2 n\, ds.$$

Il faut donc que ce terme dépende symétriquement de $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$.

Cette condition n'est réalisée, en dehors du cas peu intéressant d'une fonction u identiquement nulle, que si

$$\Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} = 0,$$

et, comme nous l'avons vu au n° 21, ne reste réalisée lorsque le contour se déforme que si, pour des points A et B quelconques, $\Delta_B \Phi_B^A$ dépend seulement de B, et non de A.

S'il en est ainsi, l'équation (50) est complètement intégrable. Dans le cas contraire, elle n'admet pas d'autre solution que $u = 0$.

Un raisonnement analogue à celui qui précède montre bien pourquoi le fait que Φ_B^A soit ou non une fonction harmonique de A ne joue aucun rôle dans la condition d'intégrabilité. En effet, pour passer de l'un à l'autre de ces cas, il faut ajouter à l'expression (56), au lieu du terme (57), le terme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \Delta \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} u\,\delta_1 n\,\delta_2 n\, ds,$$

qui dépend symétriquement de $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$. On s'explique ainsi que nous ayons pu former l'intégrale générale de l'équation (50) sans faire intervenir l'hypothèse que Φ_B^A soit une fonction harmonique de A, hypothèse que, d'après le n° 21, on aurait pu croire nécessaire.

Intégrabilité de l'équation (40).

24. En écrivant u au lieu de μ, u étant une solution de l'équation (50), et en appelant $\mathcal{H}$ la fonction inconnue, cette équation s'écrit

$$(58) \qquad \delta\mathcal{H} = -2\pi \int_C u^2 \delta n\, ds.$$

La condition d'intégrabilité se forme aisément en se reportant à

la méthode indiquée dans notre Thèse (n° 12), et l'on constate que cette équation est complètement intégrable.

Son intégrale générale est évidemment de la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \text{const.},$$

$\mathcal{H}_1$ étant une intégrale particulière.

Résumé des résultats des n°s 18 à 24.

25. On sait que, lorsqu'une quantité Φ dépend du contour C, sa variation est en général de la forme

$$\delta\Phi = \int_C \Phi_1(s)\,\delta n\, ds,$$

$\Phi_1(s)$ étant une fonction du contour et d'un point du contour, que l'on appelle la « dérivée fonctionnelle première de Φ ». De même la variation de $\Phi_1(s)$ introduit une fonction du contour et de deux points du contour que l'on appelle la « dérivée fonctionnelle seconde de Φ ».

Si l'on considère H comme fonction du contour, la formule (40) nous montre que sa variation introduit la fonction nouvelle μ; en d'autres termes la dérivée fonctionnelle première de H s'exprime en fonction de μ. La formule (42) nous montre que la variation de μ introduit la fonction nouvelle $\frac{d^2 g_M^A}{dn\, dn_A}$; en d'autres termes la dérivée fonctionnelle seconde de H s'exprime simplement à l'aide de cette fonction. Enfin les remarques du n° 20 nous montrent que la variation de cette fonction s'exprime sans introduire de fonction nouvelle; il est commode, pour étudier cette variation, d'introduire la fonction g_B^A, mais cela n'est pas une nécessité.

Les formules qui donnent la variation de H, μ, $\frac{d^2 g_M^A}{dn\, dn_A}$ sont ainsi analogues, dans le calcul fonctionnel, à ce qu'est dans le calcul différentiel ordinaire une équation différentielle d'ordre 3, que l'on écrirait sous la forme d'un système de trois équations différentielles du premier ordre en prenant comme inconnues auxiliaires les dérivées première et seconde de la fonction inconnue principale.

Les résultats des n°s 20, 22 et 24 nous montrent que ce système d'équations aux dérivées fonctionnelles est complétement intégrable, c'est-à-dire que nous pouvons en former un système de solutions prenant, pour un contour particulier, non les valeurs H, μ, $\frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$, mais des valeurs quelconques $\mathcal{H}$, u, $\frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A}$, avec la seule restriction que les fonctions u et

$$\frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A} - \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$$

soient régulières.

On voit donc quelle est la généralité de la solution ; elle dépend d'un paramètre, d'une fonction arbitraire d'un point du contour, et d'une fonction arbitraire de deux points du contour.

L'aspect du problème change si au lieu de $\frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A}$, dont la variation est définie comme nous l'avons vu au n° 20, on veut étudier les valeurs pour d'autres points que ceux du contour de la fonction Φ_B^A, la variation de cette fonction étant définie par la formule (47).

Alors le système constitué par les équations (47), (50) et (58) n'est plus complètement intégrable, et pour qu'à un système de valeurs initiales de $\mathcal{H}$ et Φ_B^A, telles que u et $\Phi_B^A - g_B^A$ soient régulières, corresponde un système de solutions de ces équations, il faut et il suffit :

D'une part, pour que l'équation (47) soit intégrable, que

$$\frac{d}{ds}\Phi_M^A = \frac{d}{ds}\Phi_A^M = 0, \tag{49}$$

M étant un point de contour et A un point quelconque ; d'autre part, pour que l'équation (50) soit intégrable, que $\Delta_B \Phi_B^A$ dépende seulement de B, et non de A.

Nous n'avions il est vrai, dans l'étude qui précède de l'équation (50), envisagé que le cas où la première de ces conditions est remplacée par la condition plus restrictive

$$\Phi_M^A = \Phi_A^M = 0,$$

mais le mode de raisonnement employé au n° 23 montre que le

résultat obtenu s'applique si l'on remplace cette condition par la condition (49), moins restrictive, et suffisante pour que l'équation (47) soit intégrable, et l'énoncé qui précède est bien exact.

Extension au cas de l'espace.

26. La méthode employée dans le présent Chapitre pour l'étude, au point de vue de leur intégrabilité, des équations aux dérivées fonctionnelles du Chapitre II, s'étend sans peine à l'étude au même point de vue des équations (2), (14) et (24) du Chapitre I. Nous laisserons au lecteur que cela intéresse le soin de faire cette étude.

Malgré la différence des formules des Chapitres I et II, l'analogie avec l'étude qui précède est presque complète. Signalons seulement les deux différences suivantes :

1° L'expression (56), qui intervient dans la condition d'intégrabilité, doit être remplacée par une expression dans laquelle interviennent les dérivées par rapport aux deux paramètres qui fixent la position du point sur la surface. Les calculs seront donc un peu plus compliqués.

2° L'équation (14) est complètement intégrable, comme l'équation (40), mais ici nous pouvons aisément former son intégrale qui est

$$\int_S u\, dS + \text{const.},$$

u étant la notation employée au lieu de σ pour représenter l'intégrale générale de l'équation (24) et intervenir ensuite dans l'équation (14).

SUR CERTAINS CRITÈRES DE CONVERGENCE;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les critères qui font le principal objet de ce travail sont relatifs aux séries

$$\Sigma\,|\Delta c_n|, \tag{1}$$

dont les termes sont les modules des différences premières

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n$$

d'une suite de nombres complexes c_n. Ces séries (1) se rencontrent dans l'étude d'autres séries par la méthode de transformation d'Abel.

Pour faciliter l'exposition, je définis d'abord (n° 1) ce que j'appelle *suite de nombres réels à variation bornée*. Cette notion est voisine de la notion classique de fonction à variation bornée, due à M. Jordan. J'aborde ensuite les séries (1); et j'étudie en premier lieu (n° 2) le cas où les nombres c_n tendent vers une limite différente de zéro; puis le cas où la limite est nulle, en commençant (n° 3) par deux critères simples de convergence, suffisants pour les applications indiquées plus loin; viennent enfin (n°s 4, 5) d'autres critères plus complexes et intéressants au seul point de vue théorique.

On peut se poser au sujet des séries

$$\Sigma\, a_n\, \varphi_n(z)$$

construites avec des fonctions données $\varphi_n(z)$ et des coefficients constants des questions analogues à celles qui constituent la théorie des séries de Taylor, chercher par exemple l'analogue du théorème d'Abel, entraînant l'existence du cercle de convergence. Les critères simples signalés tout à l'heure conduisent ainsi (n° 6) à étudier les quotients $\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} : \frac{\varphi_{n+1}(z_0)}{\varphi_n(z_0)}$, formés avec les rapports d'un terme au précédent dans les suites $\varphi_n(z)$, $\varphi_n(z_0)$. Cette

étude est possible dans des cas nombreux : séries de polynomes données par des équations aux différences finies, séries de Dirichlet, séries de factorielles et généralisations diverses. Il est intéressant de comparer les façons dont cette étude se poursuit dans différents cas, de classer ainsi et d'étendre parfois (nos 7 à 9) quelques-uns des résultats obtenus antérieurement par différents auteurs.

1. Nous dirons qu'une *suite indéfinie de nombres réels*

$$(1) \qquad a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

est à variation bornée si la série formée par ses différences premières

$$\Sigma\, \Delta a_n, \qquad \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

est absolument convergente. Lorsqu'il en est ainsi la suite (1) (ou suite a_n) admet une limite, mais l'inverse n'est pas vrai; la série des différences peut converger sans converger absolument, la suite (1) peut admettre une limite sans être à variation bornée. On peut rattacher ces suites aux fonctions à variation bornée de M. Jordan, en supposant la fonction définie non pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle déterminé, mais seulement pour les valeurs entières de la variable.

Parmi les propriétés que cette analogie conserve, nous citerons les suivantes, dont la démonstration est immédiate et qui seront utilisées plus loin.

Toute suite à variation bornée peut s'obtenir en retranchant terme à terme deux suites convergentes et non décroissantes. On a, en effet,

$$a_n = a_0 + \Delta a_0 + \ldots + \Delta a_{n-1},$$

et l'on sait que la série absolument convergente $\Sigma\, \Delta a_n$ peut être obtenue en retranchant terme à terme deux séries convergentes à termes positifs.

I. *Étant données deux suites a_n, b_n à variation bornée, les suites $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ obtenues en les ajoutant, en les retranchant ou les multipliant terme à terme sont encore à variation bornée. Il en est de même de la suite $\frac{a_n}{b_n}$ que donne la*

division terme à terme, pourvu que la borne inférieure des valeurs absolues des b_n soit différente de zéro (¹).

On peut donc dire que des opérations rationnelles en nombre limité effectuées sur les termes correspondants d'un nombre limité de suites à variation bornée donnent le terme général d'une suite à variation bornée, pourvu que les dénominateurs soient tous, en valeur absolue, supérieurs à un nombre fixe. Il n'est même pas nécessaire que les opérations soient rationnelles, ainsi que le montre la proposition suivante, qui s'applique encore au cas où l'on opérerait sur plusieurs suites au lieu d'une seule (²), et qui est également valable (avec quelques modifications dans l'énoncé), pour les fonctions de M. Jordan :

II. *Étant données une suite à variation bornée a_n et une fonction $\varphi(x)$, la suite $\alpha_n = \varphi(a_n)$ est à variation bornée dès que les nombres de la première suite restent compris dans un intervalle où la fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ existent et restent bornées.*

On a, en effet,

$$\Delta\alpha_n = \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) = \varphi'(c_n)\,\Delta a_n,$$

c_n étant compris entre a_{n+1} et a_n; la série $\Sigma\,\Delta a_n$ étant absolument convergente et $\varphi'(c_n)$ étant inférieur en valeur absolue à un nombre fixe, $\Sigma\,|\,\Delta\alpha_n\,|$ est convergente.

La remarque suivante, bien évidente, nous sera utile :

III. *Étant données trois suites a_n, b_n, c_n telles que pour toutes les valeurs de n les modules des différences Δa_n, Δb_n, Δc_n puissent représenter les longueurs des trois côtés d'un triangle, si deux des trois suites sont à variation bornée la troisième l'est aussi; autrement dit, si deux des trois séries $\Sigma\,\Delta a_n$, $\Sigma\,\Delta b_n$, $\Sigma\,\Delta c_n$ convergent absolument, il en est de même de la troisième.*

Nous allons appliquer ces propositions à l'étude de certaines

---

(¹) *Voir* le Chapitre I du *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

(²) *Voir* Hadamard, *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903, p. 181.

séries. Quand nous dirons que les hypothèses sur lesquelles elles reposent sont vérifiées, nous sous-entendrons en général qu'elles le sont asymptotiquement, c'est-à-dire par ceux des termes des suites sur lesquelles on opère dont le rang est assez élevé.

2. Soit

$$c_0 = a_0 + ib_0, \qquad c_1 = a_1 + ib_1, \qquad \ldots, \qquad c_n = a_n + ib_n, \qquad \ldots$$

une suite de nombres complexes, nous allons étudier la convergence de la série formée par les modules de leurs différences

$$(1) \qquad \Sigma\,|\,\Delta c_n\,|, \qquad \Delta c_n = c_{n+1} - c_n = \Delta a_n + i\,\Delta b_n,$$

D'après une proposition bien connue il faut et il suffit, pour que la série soit convergente, que les séries $\Sigma\,|\,\Delta a_n\,|$, $\Sigma\,|\,\Sigma\,\Delta b_n\,|$ le soient aussi; en d'autres termes que les suites a_n et b_n soient toutes deux à variation bornée.

Nous représenterons aussi les nombres complexes c_n par leurs modules ρ_n et leurs arguments θ_n, *que nous supposerons essentiellement choisis de façon que les valeurs absolues de leurs différences* $|\,\Delta\theta_n\,| = |\,\theta_{n+1} - \theta_n\,|$ *soient comprises entre* o *et* π.

Si la série (1) est convergente, la suite c_n admet une limite c; supposons d'abord cette limite différente de zéro.

Pour que la série (1) *soit convergente et que la limite* c *soit différente de zéro il faut et il suffit que les suites* ρ_n *et* θ_n *soient à variation bornée, la limite de* ρ_n *étant différente de zéro.*

Ces conditions sont *suffisantes*, car ρ_n et θ_n étant à variation bornée, $\sin\theta_n$, $\cos\theta_n$, et les produits $a_n = \rho_n \cos\theta_n$, $b_n = \rho_n \sin\theta_n$ forment des suites de même nature (propositions I et II du numéro précédent).

Montrons maintenant que ces conditions sont *nécessaires*.

Pour ρ_n, c'est une conséquence d'une proposition antérieure (n° 1, III). On peut, sans changer les différences $\Delta\theta_n$ multiplier tous les nombres c_n par $\cos\varphi + i\sin\varphi$, φ désignant l'argument de $\frac{1}{c}$; autrement dit, on peut supposer que la limite c des nombres complexes c_n est un nombre réel et positif. S'il en est ainsi,

$\operatorname{tang}\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$ est à variation bornée et $\theta_n = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\theta_n)$ l'est aussi (n° 1, II).

Les conditions relatives à la suite ρ_n : variation bornée, limite non nulle équivalent à la suivante : $\log \rho_n$ est à variation bornée. On peut dès lors résumer ce qui précède en disant :

Pour que la série (1) *soit convergente et que la limite* c *de* c_n *soit différente de zéro, il faut et il suffit que la série* $\sum \left| \log \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ *où le coefficient de* i, *dans le logarithme, est inférieur à* π *soit convergente* (¹).

On ramène cette proposition à la règle de convergence absolue d'un produit infini. Posant, en effet,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + r_n, \qquad \Delta c_n = r_n c_n,$$

nous avons

$$c_n = c_0(1 + r_1)(1 + r_2)\ldots(1 + r_n).$$

Le produit infini $c_0 \Pi(1 + r_n)$ est absolument convergent en même temps que la série $\Sigma|\log(1 + r_n)|$ et la convergence de l'une des séries à termes positifs $\Sigma|r_n|$, $\Sigma|\log(1 + r_n)|$ entraîne celle de l'autre puisque le rapport des termes correspondants tend vers l'unité quand n devient infini (²).

3. Lorsque la limite c de c_n est nulle, le raisonnement antérieur reste exact pour ρ_n qui est toujours à variation bornée, sa limite étant alors nulle. Il n'est plus valable pour θ_n ; on voit bien que si ρ_n et θ_n sont tous deux à variation bornée $\Sigma|\Delta c_n|$ converge, mais cette série peut converger sans que θ_n soit à variation bornée. Les cas élémentaires suivants, importants par leurs applications, vont nous le montrer.

I. On a

$$|\Delta c_n| = |c_{n+1} - c_n| \leqq |c_{n+1}| + |c_n| = \rho_{n+1} + \rho_n,$$

(¹) Bien que cette proposition ramène l'une à l'autre deux questions dont les difficultés paraissent égales, elle a des conséquences intéressantes (n° 9).

(²) Cette méthode diffère peu de celle de M. Jordan (*voir* son *Cours d'Analyse*, 3e édition, t. I, p. 311).

et par suite : *si la série* $\Sigma \rho_n$ *est convergente il en est de même de la série* $\Sigma |\Delta c_n|$.

Un autre critère simple résulte de l'interprétation de $\Sigma |\Delta c_n|$ comme longueur de la brisée obtenue en joignant les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n, d'affixes c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ... et de la remarque suivante.

L'élément d'arc d'une courbe (C) rapportée à des coordonnées polaires θ, ρ est

$$ds = \frac{d\rho}{\cos V} = \frac{\rho\, d\theta}{\sin V},$$

V désignant l'angle de la tangente et du rayon vecteur. Supposons la courbe telle que le rayon vecteur décroisse constamment quand on la parcourt dans un sens convenable, et que l'angle V reste inférieur à un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$. *La longueur de tout arc de la courbe intérieur au cercle* $\rho = \rho_p$ *reste finie et inférieure à* $\frac{\rho_p}{\cos \alpha}$.

La proposition subsiste quand la courbe (C) admet une infinité de points anguleux; soient A_0, A_1, ..., A_n, ... ces points rangés dans l'ordre des rayons vecteurs décroissants; les arcs intermédiaires $A_n A_{n+1}$ sont toujours supposés réguliers et la limite α de l'angle V est la même pour tous. La ligne brisée obtenue en traçant les cordes $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, ... a, elle aussi, une longueur finie.

On peut inversement se donner la brisée $A_0 A_1 \ldots A_n \ldots$ et chercher à construire une courbe (C) remplissant les conditions qui précèdent. Supposons, comme plus haut, les points A_n donnés par leur affixes c_n ou par leurs coordonnées polaires ρ_n, θ_n (avec $|\Delta\theta_n| < \pi$); nous prendrons pour arcs $A_n A_{n+1}$ de (C) des arcs de spirales logarithmiques ayant le pôle O comme point asymptote. L'angle V_n sous lequel l'arc $A_n A_{n+1}$ coupe ses rayons vecteurs est donné par

$$\operatorname{tang} V_n = \frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log \rho_n|}.$$

Il suffit que cette expression reste inférieure à un nombre fixe pour que la courbe (C) remplisse les conditions requises et que la brisée ait une longueur finie. On peut d'ailleurs écrire

$$\frac{\Delta\theta_n}{\Delta \log \rho_n} = \frac{\mathcal{I}(\log q_n)}{\mathcal{R}(\log q_n)}, \qquad q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

$\mathcal{R}(z)$ et $\mathcal{I}(z)$ désignant respectivement la partie réelle et le coefficient de i dans le nombre complexe z. La détermination du logarithme est telle que $|\mathcal{I}(\log q_n)| < \pi$. La décroissance de la suite ρ_n se traduit d'ailleurs par $\mathcal{R}(\log q_n) < 0$. Nous arrivons ainsi au critère cherché :

II. *Si l'on a posé* $q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, *et si :*

1°
$$\mathcal{R}(\log q_n) < 0 \qquad (\textit{suite } \rho_n \textit{ décroissante}):$$

2°
$$\frac{|\mathcal{I}(\log q_n)|}{|\mathcal{R}(\log q_n)|} < \operatorname{tang}\alpha,$$

α étant un nombre fixe, la série $\Sigma|\Delta c_n|$ *est convergente; de plus, le reste* $|\Delta c_p| + |\Delta c_{p+1}| + \ldots$ *est inférieur à* $\frac{\rho_p}{\cos\alpha}$.

Nous appliquerons plus loin ce critère; mais nous allons auparavant en donner d'autres qui proviennent encore de la comparaison de la croissance des suites ρ_n, $|\Delta\rho_n|$, $\rho_n|\Delta\theta_n|$.

4. Soit l_n la longueur de la partie de la brisée $A_0A_1A_2\ldots$ comprise entre les sommets A_0 et A_n :

$$l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = |\Delta c_0| + |\Delta c_1| + \ldots + |\Delta c_{n-1}|.$$

On a

$$\Delta l_n = l_{n+1} - l_n = |\Delta c_n|,$$

et le triangle OA_nA_{n+1} donne

$$\Delta l_n = \sqrt{(\Delta\rho_n)^2 + 4\rho_n\rho_{n+1}\sin^2\frac{\Delta\theta_n}{2}},$$

ce qui montre que [1]

$$\Delta l_n, \quad |\Delta\rho_n| \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\left|\sin\frac{\Delta\theta_n}{2}\right|$$

peuvent représenter les côtés d'un triangle; donc, *pour que* l_n

---

[1] Nous ne supposons plus ici la suite ρ_n décroissante.

tende vers une limite finie, il faut et il suffit que

$$\Sigma\,|\,\Delta\rho_n\,| \quad \text{et} \quad \Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\left|\sin\frac{\Delta\theta_n}{2}\right|$$

convergent (¹).

La convergence de l'une des séries

$$\Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\left|\sin\frac{\Delta\theta_n}{2}\right| \quad \text{et} \quad \Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\,|\,\Delta\theta_n\,|$$

entraîne celle de l'autre, puisque le quotient des termes de même rang reste compris entre les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\pi}$.

On a d'ailleurs

$$\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}} = \sqrt{\rho_n(\rho_n + \Delta\rho_n)} = \sqrt{\left(\rho_n + \frac{1}{2}\Delta\rho_n\right)^2 - \left(\frac{\Delta\rho_n}{2}\right)^2};$$

la série $\Sigma\,|\,\Delta\rho_n\,|$ est censée convergente, par suite aussi $\Sigma\,|\,\Delta\rho_n\,\Delta\theta_n$ puisque $|\,\Delta\theta_n\,| < \pi$, donc (1, III) les séries

$$\Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\,|\,\Delta\theta_n\,| \quad \text{et} \quad \sum\frac{\rho_n + \rho_{n+1}}{2}\,|\,\Delta\theta_n\,|$$

sont simultanément convergentes. On peut d'ailleurs substituer à leur étude celle de $\Sigma\rho_n|\Delta\theta_n|$, ou plus généralement celle de $\Sigma\rho'_n|\Delta\theta_n|$, ρ'_n étant un nombre positif tel que le quotient $\frac{|\,\rho'_n - \rho_n\,|}{\Delta\rho_n}$ reste borné. Tel est, par exemple, le cas de la série $\sum\left|\frac{\Delta\theta_n}{\Delta\log\rho_n}\Delta\rho_n\right|$ puisque

$$\frac{\Delta\rho_n}{\Delta\log\rho_n} = \frac{\rho_{n+1} - \rho_n}{\log\rho_{n+1} - \log\rho_n} = \rho'_n$$

est, d'après la formule de l'accroissement fini, compris entre ρ_n et ρ_{n+1}. En résumé :

Pour que la série $\Sigma\,|\,\Delta c_n\,|$ converge, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies.

1° *La suite des nombres $\rho_n = |\,c_n\,|$ est à variation bornée;*

2° *La série $\Sigma\,\rho_n\,|\,\Delta\theta_n\,|$ est convergente.*

A cette dernière série on peut substituer toute série $\Sigma\,\rho'_n\,|\,\Delta\theta_n\,|$

(¹) *Voir* la Thèse de M. Cahen, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XI, 1894, p. 83.

qui lui soit équivalente au point de vue de la convergence, en supposant la condition 1° remplie.

5. Si les quotients $\frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log \rho_n|}$ sont bornés, et si la condition 1° est remplie, la condition 2° l'est également; *on a ainsi une extension de la règle de convergence donnée plus haut* (n° 3, II). Nous avions, à cet endroit, supposé la suite ρ_n décroissante; étant formée de nombres positifs, elle est alors à variation bornée. Quand ce critère du n° 3 n'est pas applicable, mais que l'extension actuelle peut être utilisée, on aura une limite supérieure du reste de la série $\Sigma \rho_n |\Delta \rho_n|$ en remplaçant le facteur ρ_p du n° 3 par la variation totale de ρ, c'est-à-dire par $\Sigma |\Delta \rho_n|$, l'indice n variant de p à $+\infty$.

Quand $\frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log \rho_n|}$ devient infini avec n, on peut essayer des critères, dont nous allons dire un mot, qui sont analogues aux critères logarithmiques bien connus [1].

A l'aide des fonctions

$$\log_1 x = \log x, \qquad \log_2 x = \log(\log x), \qquad \ldots, \qquad \log_i x = \log(\log_{i-1} x),$$

obtenues par itération de la fonction logarithmique et des nombres $x_n = \frac{1}{\rho_n}$, construisons la suite dont le terme de rang n est

$$u_{i,p,n} = (\log_i x_n)^{-p},$$

p désignant un nombre réel, et considérons la suite des différences

$$\Delta u_{i,p,n} = (\log_i x_{n+1})^{-p} - (\log_i x_n)^{-p}.$$

Admettons que les nombres ρ_n forment une suite décroissante, et tendent toujours vers zéro. Toutes les différences $\Delta u_{i,p,n}$ ont le

---

(1) *Voir* Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. I; Jordan, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 292-298; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, 4, n°s 8, 9.

Les séries de comparaison employées ici diffèrent peu sans doute des séries indiquées dans les Ouvrages cités; mais la forme qui leur est donnée, attirant dès le début l'attention sur la croissance de la somme de la série de comparaison, m'a paru assez intéressante par sa simplicité pour justifier l'exposé rapide qui fait l'objet du n° 5.

signe de $-p$; lorsque p est positif, la série $\Sigma_n \Delta u_{i,p,n}$ (à termes tous négatifs) est convergente; si $p < 0$, elle est divergente.

Une formule bien connue

$$\frac{f(x) - f(x')}{g(x) - g(x')} = \frac{f'(x'')}{g'(x'')},$$

x'' étant compris entre x et x', se prête facilement à l'étude asymptotique des rapports $\frac{\Delta u_{i,p,n}}{\Delta u_{i-1,p',n}}$, qui deviennent infinis avec n lorsque p' est positif et tendent vers zéro lorsque p' est négatif, et à celle des rapports $\frac{\Delta u_{i,p,n}}{\Delta u_{i,p',n}}$, qui deviennent infinis avec n si $p' > p$. On compare, plus facilement encore, les diverses expressions $u_{i,p,n}$ et par suite les sommes ou les restes correspondant aux n premiers termes des séries.

Utilisant alors les séries $\Sigma|\Delta u_{i,p,n}|$ comme séries de comparaison, nous suivrons le procédé indiqué par M. Borel (Ouvrage cité, p. 10) en l'appliquant à la série $\Sigma \rho'_n |\Delta\theta_n|$, où, comme nous l'avons vu (n° 4), ρ'_n peut être choisi de façon quelconque entre ρ_n et ρ_{n+1}. En regardant i et p comme fixes, nous prendrons pour ρ'_n un nombre tel que la formule de l'accroissement fini donne

$$\left|\frac{\Delta u_{i,p,n}}{p}\right| = \frac{(\log_i x'_n)^{-p}}{\lambda_i x'_n} \Delta\rho_n,$$

formule où $x'_n = \frac{1}{\rho'_n}$ et $\lambda_i x = x \log x \ldots \log_i x$.

Si x'_n était connu, on pourrait déterminer p_n tel que

$$\frac{(\log_i x'_n)^{-p_n}}{\lambda_i x'_n} = \rho'_n \frac{|\Delta\theta_n|}{\Delta\rho_n} = \frac{|\Delta\theta_n|}{x'_n \Delta\rho_n};$$

associons un tel nombre p_n à tout nombre x'_n compris entre $x_n = \frac{1}{\rho_n}$ et $x_{n+1} = \frac{1}{\rho_{n+1}}$, puis faisons croître n indéfiniment, dans ces conditions p_n admet une plus grande et une plus petite limites p' et p''. *Si ces deux limites d'indétermination sont positives, les séries* $\Sigma \rho_n |\Delta\theta_n|$ *et* $\Sigma |\Delta c_n|$ *sont convergentes;* si p' et p'' *sont négatifs, les séries sont divergentes;* s'ils sont de signes contraires, le critère est inapplicable; si $p' = p'' = 0$, il tombe en défaut et l'on peut essayer le critère analogue en remplaçant i par $i + 1$, etc.

L'hypothèse, faite en dernier lieu, que la suite ρ_n est décrois-

sante, n'est pas indispensable : on peut présenter le mode de comparaison précédent en faisant intervenir la grandeur de ρ_n, $\rho'_n = \frac{1}{x'_n}$, ρ_{n+1} et non le rang n, et admettant que la suite $(\log_i x_n)^{-p}$ (où p est l'exposant de la série de comparaison) est à variation bornée. Mais nous n'insisterons pas sur ces questions dont nous n'aurons pas à faire usage.

6. Les séries $\Sigma|\Delta c_n|$ se rencontrent quand on applique aux séries de la forme $\Sigma c_n u_n$ la méthode de sommation partielle d'Abel. Rappelons à ce sujet les propositions suivantes :

I. La série $\Sigma c_n u_n$ converge si les deux séries Σu_n, $\Sigma|\Delta c_n|$ sont convergentes.

II. La série $\Sigma c_n u_n$ converge si les trois conditions suivantes sont réalisées : 1° la somme des p premiers termes de la série Σu_n reste bornée quel que soit p; 2° c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; 3° $\Sigma|\Delta c_n|$ est convergente.

Ces théorèmes peuvent être complétés par des énoncés concernant la convergence uniforme des séries $\Sigma c_n u_n$ quand la suite c_n est formée de fonctions d'une variable, la suite u_n étant composée de constantes ([1]). Ils ont permis d'étendre à diverses classes de séries (séries de Dirichlet, séries de factorielles, etc.) ([2]), la plupart des résultats que les travaux d'Abel, de Cauchy et de M. Hadamard avaient donnés pour les séries de Taylor en ce qui concerne l'existence et la détermination du domaine de convergence, la continuité de la série, etc.

Les séries ainsi étudiées se contruisent, d'une façon générale, en partant d'une suite donnée de fonctions d'une variable complexe

$$(1) \qquad \varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots$$

([1]) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (II, 1, 17), pour ce point et pour la bibliographie.

([2]) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, 17, nos 1 et 17 à 20. Depuis l'apparition de cet article, M. R.-D. Carmichaël a étudié une classe générale de séries de cette nature (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 17, 1916, p. 207; *American Journal of Mathematics*, vol. 39, 1917, p. 385).

Elles sont de la forme $\Sigma a_n \varphi_n(z)$, les a_n désignant des constantes.

L'existence du domaine de convergence s'établit en montrant que si la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge pour une valeur z_0 de z, ou plus généralement si la somme de ses p premiers termes reste, pour cette valeur de z, bornée quelque soit p, on peut affirmer la convergence de la série pour un ensemble de valeurs de z indépendant de la suite des coefficients a_n. On écrit

$$a_n \varphi_n(z) = a_n \varphi_n(z_0) \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)}$$

et posant

$$u_n = a_n \varphi_n(z_0), \qquad c_n = \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)},$$

on est conduit par les théorèmes I et II à étudier la série $\Sigma|\Delta c_n|$ où les a_n ne figurent plus.

La convergence de cette dernière série $\Sigma|\Delta c_n|$ peut, ainsi que nous l'avons vu (n°s 2, 3), être, dans un grand nombre de cas, étudiée par l'examen des expressions

$$q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} : \frac{\varphi_{n+1}(z_0)}{\varphi_n(z_0)}.$$

7. Nous poserons

$$\theta_n(z) = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)}, \qquad \text{d'où} \qquad q_n = \frac{\theta_n(z)}{\theta_n(z_0)}.$$

Les critères de convergence où intervient le quotient q_n sont d'une application particulièrement simple lorsque dans la suite (1) *le rapport $\theta_n(z)$ d'un terme au précédent tend vers une limite.*

1° *Supposons d'abord que la limite dépende de z*; soit $\theta(z)$ cette limite.

On applique alors le premier critère du n° 3; *la convergence de la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ est assurée en vertu de l'hypothèse concernant $\Sigma a_n \varphi_n(z_0)$ dans tout le domaine où $|\theta(z)| < |\theta(z_0)|$*. C'est le cas des séries de Taylor; c'est également le cas de certaines séries de polynomes, par exemple de celles signalées par Poincaré dans son Mémoire (1) : *Sur les équations linéaires ordinaires et aux différences finies*. Les séries de cette nature s'étu-

(1) *American Journal of Mathematics*, t. VII, 1885, p. 243.

dient, comme les séries de Taylor, sans faire appel, en général, à la méthode de sommation d'Abel.

2° *Si* $\theta_n(z)$ *tend vers une limite* θ *indépendante de* z, *et différente de zéro*, q_n tend vers l'unité. On peut alors écrire

$$\theta_n(z) = \theta[1 + p_n(z)],$$

$p_n(z)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et

$$q_n = \frac{1 + p_n(z)}{1 + p_n(z_0)} = 1 + p_n(z) - p_n(z_0) + \ldots.$$

Les termes non écrits peuvent être négligés dans l'application des théorèmes des n°s 2 et 3, si, comme nous le supposons, $p_n(z)p_n(z_0)$ et $[p_n(z_0)]^2$ sont infiniment petits par rapport à la différence $p_n(z) - p_n(z_0)$. Dans ces conditions, on étudiera d'abord la série $\Sigma|p_n(z) - p_n(z_0)|$ (n° 2); s'il existe une région où elle est convergente, $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge dans cette région. Si l'on ne peut affirmer l'existence d'une pareille région, on examine, comme au n° 3, la partie réelle et le coefficient de i de $\log q_n$ ou de l'infiniment petit équivalent $p_n(z) - p_n(z_0)$. La série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge dans toute région où $\mathcal{R}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}$ est négatif et où le rapport $\frac{\mathcal{I}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}}{\mathcal{R}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}}$ reste borné.

On peut donner comme exemple certaines séries de polynomes (Poincaré, *loc. cit.*, p. 254), les séries de factorielles et leurs généralisations [1].

Il est facile d'ailleurs de construire des suites de fonctions $\varphi_n(z)$ pour lesquelles le rapport $\theta_n(z)$ tende vers une limite θ indépendante de z; on peut toujours (par le changement de φ_n en $l^n\varphi_n$) supposer $\theta = 1$. Il suffit de déterminer alors φ_n par la donnée de φ_0 et de $\theta_n(z)$. Prenons, par exemple,

$$\varphi_0 = 1, \qquad \theta_{n-1}(z) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{n}\right);$$

on voit facilement que les séries construites en partant de la suite de fonctions

$$\varphi_n(z) = \prod_{h=1}^{n} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{h}\right)$$

---

[1] Landau, *Sitzungsberichte Akad. München*, 1906, p. 151.

ont un domaine de convergence limité par une parallèle à l'axe des quantités imaginaires. Il est intéressant d'observer que se donner $\theta_n(z)$ tendant vers la limite 1 revient à se donner $p_n(z) = \theta_n(z) - 1$, et à déterminer les fonctions φ_n par le système d'équations linéaires aux différences finies

$$\Delta \varphi_n(z) = p_n(z)\varphi_n(z).$$

8. Les critères précédents peuvent être encore d'une application facile lorsque $\theta_n(z)$, sans tendre vers une limite finie et différente de zéro, a une expression simple.

Telles sont les séries de Dirichlet, où, comme on le sait,

$$\varphi_n(z) = e^{-\lambda_n z},$$

les nombres λ_n étant positifs croissants et devenant infinis avec n. On a

$$\theta_n(z) = e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)z}$$

et l'étude des quotients

$$q_n = e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(z-z_0)}$$

est immédiate. Les différences $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ pouvant être des nombres positifs quelconques, on n'a plus, en général, de limite pour $\theta_n(z)$; mais on voit immédiatement que si $\mathcal{R}(z) > \mathcal{R}(z_0)$, le coefficient de i dans z étant naturellement fini, les conditions du n° 3 sont réalisées; l'existence de l'abscisse de convergence en résulte immédiatement.

Plus généralement, supposons connue une expression asymptotique pour $\theta_n(z)$, telle qu'on puisse en déduire

$$(1) \quad \log q_n = g_n \left\{ a(z, z_0) + i\, b(z, z_0) \right\} \left\{ 1 + \alpha_n(z, z_0) + i\, \beta_n(z, z_0) \right\},$$

les nombres g_n étant constants, réels, positifs, la série Σg_n étant divergente: $a(z, z_0)$, $b(z, z_0)$, $\alpha(z, z_0)$, $\beta(z, z_0)$ désignant des expressions réelles construites en partant des nombres complexes z et z_0, α_n et β_n tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. On a

$$\mathcal{R} \log q_n = g_n a \left\{ 1 + \alpha_n - \frac{b}{a}\beta_n \right\},$$

$$\frac{\mathcal{I} \log q_n}{\mathcal{R} \log q_n} = \frac{b}{a} \frac{1 + \alpha_n}{1 + \alpha_n - \frac{b}{a}\beta_n} + \frac{\beta_n}{1 + \alpha_n - \frac{b}{a}\beta_n}.$$

Si donc la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge pour $z = z_0$, ou si tout au moins la somme de ses p premiers termes reste bornée, elle convergera pour les valeurs de z telles que $a(z, z_0)$ soit négatif et que $\frac{b(z, z_0)}{a(z, z_0)}$ reste borné. C'est le cas des séries étudiées par M. D. Carmichaël dans le travail cité plus haut.

On peut encore donner un exemple d'utilisation d'une expression asymptotique de q_n en prenant

$$(2) \qquad q_n = \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^p e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(z - z_0)}.$$

Dans $\log q_n$ le terme $p(\log \lambda_{n+1} - \log \lambda_n)$ est négligeable vis-à-vis du terme contenant $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ en facteur, lorsque les λ deviennent infinis avec n. Ce rapport (2) intervient et ces circonstances se présentent dans l'étude directe des séries obtenues en dérivant terme à terme une série de Dirichlet, étude faite par M. Cahen dans sa Thèse bien connue.

9. Étant données deux suites de fonctions

$$\begin{array}{llll} \varphi_0(z), & \varphi_1(z), & \ldots, & \varphi_n(z), \quad \ldots, \\ \psi_0(z), & \psi_1(z), & \ldots, & \psi_n(z), \quad \ldots, \end{array}$$

si l'on pose $c_n = \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, et si l'on admet que pour tous les points z d'un domaine D la série $\Sigma|\Delta c_n|$ converge $\left(\text{ce qu'on peut souvent reconnaître, d'après les n}^{\text{os}}\ 2 \text{ et } 3, \text{ par l'étude du rapport } \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} : \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right)$, alors en tous les points de D où une série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge, la série $\Sigma a_n \psi_n(z)$ construite avec les mêmes coefficients est également convergente [1].

Si, de plus, la limite c de c_n pour n infini est différente de zéro, dans le domaine D la réciproque est vraie (*voir* n° 1, I) de telle façon que les séries $\Sigma a_n \varphi_n(z)$, $\Sigma a_n \psi_n(z)$ convergent pour les mêmes points. D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 2), pour que les deux conditions : $\Sigma|\Delta c_n|$ convergente, $c \neq 0$ soient rem-

---

[1] Lorsque c_n tend vers zéro, $\Sigma|\Delta c_n|$ étant convergente, il suffit que la somme des p premiers termes de $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ reste bornée quel que soit p pour que la série $\Sigma a_n \psi_n(z)$ soit convergente.

plies, il faut et il suffit que le produit infini

$$\Pi(1+r_n), \qquad 1+r_n = q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

soit absolument convergent.

C'est ainsi que la proposition de M. Landau (*loc. cit.*, p. 166), concernant la convergence simultanée d'une série de factorielles et d'une série de Dirichlet, se rattache à la convergence absolue du produit infini

$$z(1+z)\prod_{n=2}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{z\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

qui représente la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$, et qu'on ramène aisément à la forme classique

$$z\,e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

où C désigne la constante d'Euler.

SUR CERTAINES HYPERSURFACES DE L'ESPACE CONFORME RÉEL A CINQ DIMENSIONS;

Par M. E. Cartan.

J'ai étudié dans un Mémoire précédent [1] la représentation conforme des hypersurfaces dans l'espace à $n \geqq 5$ dimensions et j'ai montré en particulier qu'une telle représentation ne pouvait exister qu'entre deux hypersurfaces se déduisant l'une de l'autre par une transformation conforme, à moins que les hypersurfaces ne fussent des enveloppes d'hypersphères à deux paramètres au plus, et encore cette condition n'est-elle pas suffisante. J'ai signalé que pour $n = 5$ il pouvait y avoir un cas exceptionnel où deux hypersurfaces *distinctes* de l'espace conforme, c'est-à-dire ne se déduisant pas l'une de l'autre par une transformation conforme, admettraient une représentation conforme l'une sur l'autre sans

---

[1] *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \leqq 5$ dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLV, 1917, p. 57-121).

être des enveloppes d'hypersphères à deux paramètres : ces hypersurfaces possèdent alors quatre familles distinctes de lignes de courbure et *la représentation se fait avec conservation des lignes de courbure*.

Le but des pages suivantes est l'étude de ces hypersurfaces. Le résultat principal obtenu est, qu'étant donnée une hypersurface (S) à lignes de courbure distinctes, il n'existe aucune famille *continue* d'hypersurfaces (Σ) distinctes admettant une représentation conforme sur (S) ou, plus brièvement, que (S) *n'admet pas de déformation continue dans l'espace conforme*. D'une manière plus précise, il ne peut exister qu'*une* hypersurface (Σ) distincte de (S) admettant une représentation conforme sur (S). La recherche des couples de deux hypersurfaces distinctes (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre est ramenée à l'intégration d'un certain système de Pfaff qui n'est pas discuté complètement. J'ai simplement déterminé les couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) tels que, sur chacune des deux hypersurfaces, les trois premières familles de lignes de courbure soient formées de circonférences : ces couples dépendent de cinq paramètres arbitraires.

1. Considérons, dans l'espace conforme à cinq dimensions, un système de référence heptasphérique formé de cinq hypersphères A, A_1, A_2, A_3, A_4, de rayon non nul, et de deux hypersphères-points M, N de rayon nul, les cinq premières hypersphères passant par les centres de M et N et étant orthogonales entre elles : chaque hypersphère est définie par sept coordonnées homogènes x_i; la condition pour qu'elle soit de rayon nul est obtenue en annulant une certaine forme quadratique Φ des sept coordonnées. Si deux hypersphères A, B ont pour coordonnées x_i et y_i, nous poserons

$$A \mid B = \sum \frac{1}{2} y_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i},$$

et nous supposerons que les coordonnées des hypersphères de référence sont choisies de manière à avoir

$$A \mid A = A_i \mid A_i = M \mid N = 1;$$

on a, de plus, par hypothèse,

$$A \mid A_i = A_i \mid A_j = A \mid M = A \mid N = A_i \mid M = A_i \mid N = M \mid M = N \mid N = 0.$$

Le système de référence le plus général dépend de 21 paramètres arbitraires. Si l'on donne à ce système de référence le plus général un déplacement infiniment petit, on a des relations de la forme

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
dM &= \theta M + \omega A + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \omega_\rho A_\rho,\\
dA &= -\chi M - \omega N - \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \psi_\rho A_\rho,\\
dA_i &= -\chi_i M - \omega_i N + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \varpi_{i\rho} A_\rho + \psi_i A,\\
dN &= -\theta N - \sum_{\rho=}^{\rho=4} \chi_\rho A_\rho + \chi A,
\end{aligned}
\right.
$$

où les coefficients ω_i, χ_i, $\varpi_{ij} = -\varpi_{ji}$, ψ_i, θ, χ, sont 21 expressions de Pfaff indépendantes par rapport aux différentielles des 21 paramètres dont dépend le système de référence mobile. Ces 21 expressions de Pfaff ont leurs covariants bilinéaires donnés par les formules

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega' &= [\theta\omega] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \psi_\rho],\\
\omega'_i &= [\theta\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \varpi_{\rho i}],\\
\theta' &= -\sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho \chi_\rho],\\
\chi'_i &= [\chi_i \theta] - \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\chi_\rho \varpi_{\rho i}] + [\psi_i \chi],\\
\chi' &= [\chi\theta] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\chi_\rho \psi_\rho].\\
\varpi'_{ij} &= [\omega_j \chi_i] - [\omega_i \chi_j] + \sum_{\rho=1}^{\rho=2} [\varpi_{i\rho} \varpi_{\rho j}] - [\psi_i \psi_j],\\
\psi'_i &= -[\omega_i \chi] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\psi_\rho \varpi_{\rho i}].
\end{aligned}
\right.
$$

2. Étant donnée une hypersurface (S) à quatre dimensions, on peut faire correspondre à chaque point M de cette hypersurface un système de référence heptasphérique, l'une des hypersphères-points ayant pour centre le point M et continuant à être désignée par cette même lettre, l'hypersphère A étant tangente à (S). On peut, de plus, supposer que les hypersphères A_1, A_2, A_3, A_4 sont normales aux lignes de courbure. Le système de référence associé au point M est encore jusqu'à un certain point arbitraire, car on peut multiplier les coordonnées de M par un même facteur et remplacer respectivement A, A_1, A_2, A_3, A_4, par $A + \lambda M$, $A_1 + \lambda_1 M$, $A_2 + \lambda_2 M$, $A_3 + \lambda_3 M$, $A_4 + \lambda_4 M$, avec cinq paramètres arbitraires. Quoi qu'il en soit, une fois choisi le système de référence associé à chaque point M de (S), on a, pour tout déplacement sur (S), les relations

$$\omega = 0,$$
$$\psi_i = a_i \omega_i,$$

où les coefficients a_i sont tels que $A + a_i M$ soit la $i^{\text{ème}}$ hypersphère de courbure.

Si maintenant on a une seconde hypersurface (Σ), à chacun de ses points P on peut faire correspondre d'une manière analogue un système de référence formé des hypersphères-points P, Q et de cinq hypersphères B, B_i, l'hypersphère B étant tangente à (Σ). On peut enfin supposer les B_i normales aux lignes de courbure, de sorte qu'en désignant par de grandes lettres les expressions de Pfaff qui définissent un déplacement infiniment petit du système de référence on a

$$\Omega = 0,$$
$$\Psi_i = b_i \omega_i.$$

Le ds^2 de l'hypersurface (S) est, à un facteur fini près arbitraire, égal à

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2,$$

celui de (Σ) est, dans les mêmes conditions, égal à

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2.$$

3. Cela posé, si les deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettent une représentation conforme l'une sur l'autre, avec conservation

des lignes de courbure, on aura, entre les systèmes de référence associés aux deux hypersurfaces, une correspondance telle qu'on pourra toujours supposer, par cette correspondance, vérifiées les relations

$$\Omega_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En résumé, la recherche de deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure revient à l'intégration du système de Pfaff suivant, où entrent 50 variables, tant dépendantes qu'indépendantes :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \Omega = 0, \\ \Omega_i = \omega_i, \\ \psi_i = a_i \omega_i, \\ \Psi_i = b_i \Omega_i. \end{cases}$$

Le système de référence associé à chaque point M de (S) dépend de six paramètres arbitraires : une fois qu'il est choisi, le système associé au point correspondant de (Σ) ne dépend plus que de cinq paramètres arbitraires : la connaissance du facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de M entraîne en effet celle du facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de P.

Si l'on égale les covariants bilinéaires des deux membres de chaque équation (I), en tenant compte de ces équations elles-mêmes, on trouve, d'après (2),

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{cases} \omega' \equiv 0, \\ \Omega' \equiv 0, \\ \Omega'_i - \omega'_i \equiv [(\Theta - \theta)\omega_i] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho (\Pi_{\rho i} - \varpi_{\rho i})], \\ (\psi_i - a_i \omega_i)' \equiv [\omega_i (da_i + a_i \theta - \chi)] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} (a_\rho - a_i)[\omega_\rho \varpi_{\rho i}], \\ (\Psi_i - b_i \Omega_i)' \equiv [\Omega_i (db_i + b_i \Theta - \mathrm{X})] + \sum_{\rho=1}^{\rho=4} (b_\rho - b_i)[\Omega_\rho \Pi_{\rho i}]. \end{cases}$$

On peut maintenant spécialiser le système de référence associé à un point P de (Σ) de manière à avoir

$$\Theta = \theta;$$

il suffit pour cela, comme le montrent les formules (1), de choisir convenablement les hypersphères B_1, B_2, B_3, B_4. Les six paramètres qui entrent dans le système de référence associé à M une fois choisis, le système de référence associé à P ne dépend plus alors que d'un paramètre, l'hypersphère B pouvant être remplacée par $B + \mu P$.

Pour toute solution de (I) les seconds membres des équations (I') doivent être nuls ; on en déduit facilement qu'on doit avoir

$$\Pi_{ij} = \varpi_{ij}.$$

4. On peut d'après cela ajouter aux équations de Pfaff (I) les suivantes

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Theta = 0, \\ \Pi_{ij} = \varpi_{ij}. \end{cases}$$

L'égalité des covariants bilinéaires des deux membres des équations de ce nouveau système donne, en tenant compte des équations (I) et (II),

$$\text{(II')} \qquad \begin{cases} \Theta' - \theta' \equiv -\sum_{\rho=1}^{\rho=4} [\omega_\rho (X_\rho - \chi_\rho)], \\ \Pi'_{ij} - \varpi'_{ij} \equiv [\omega_j (X_i - \chi_i)] - [\omega_i (X_j - \chi_j)] - (b_i b_j - a_i a_j)[\omega_i \omega_j] \end{cases}$$

Les seconds membres de ces équations doivent être nuls pour toute solution du système (I) et (II) ; on en déduit facilement des relations de la forme

$$\text{(3)} \qquad X_i - \chi_i = u_i \omega_i,$$

avec

$$\text{(4)} \qquad u_i + u_j = a_i a_j - b_i b_j.$$

En calculant de deux manières différentes la somme Σu_ρ, on arrive à la relation importante

$$\text{(5)} \qquad (a_i - a_j)(a_k - a_l) = (b_i - b_j)(b_k - b_l)$$

qui a lieu quelle que soit la permutation (i, j, k, l) des indices $(1, 2, 3, 4)$.

Cette relation (5) prouve en particulier que le rapport anhar-

monique des quatre coefficients b_i est égal au rapport anharmonique des quatre coefficients a_i de sorte qu'on peut passer des a_i aux b_i par une même transformation homographique.

Supposons d'abord que cette transformation soit de la forme

$$(6) \qquad b_i = h a_i + k \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les relations (5) donnent

$$h^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad h = \pm 1.$$

Les hypersphères de courbure de (S) et de (Σ) sont alors respectivement

$$A + a_i M,$$
$$B + k P \pm a_i P.$$

Changeons au besoin l'hypersphère point P en — P, et prenons B + k P pour nouvelle hypersphère B : on voit qu'on a alors

$$b_i = a_i,$$

et par suite

$$\Psi_i = \psi_i.$$

L'égalité des covariants bilinéaires de Ψ_i et ψ_i conduit, d'après (2), à

$$[\omega_i(X - \chi)] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

d'où

$$X = \chi.$$

L'égalité des covariants X' et χ' conduit à la relation

$$\Sigma[\psi_\rho(X_\rho - \chi_\rho)] = 0$$

qui, jointe à la relation, extraite de (H'),

$$\Sigma[\omega_\rho(X_\rho - \chi_\rho)] = 0,$$

montre facilement qu'on a

$$X_i = \chi_i.$$

Finalement les deux systèmes de référence associés aux deux hypersurfaces (S) et (Σ) admettent, dans l'hypothèse exprimée par les égalités (6), le même déplacement instantané, et par suite *ces deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme*, cas banal que nous écartons.

La relation entre les a_i et les b_i est donc de la forme

$$(7) \qquad b_i = \frac{h a_i + k}{a_i + p};$$

mais on peut encore la simplifier en remarquant que les hypersphères de courbure de (Σ) étant

$$B + \frac{ha_i + k}{a_i + p} P,$$

on peut, en remplaçant B par $B + hP$, supposer h nul. On a donc finalement

$$b_i = \frac{k}{a_i + p} \tag{8}$$

avec la relation, tirée de (5),

$$k^2 = (a_1 + p)(a_2 + p)(a_3 + p)(a_4 + p). \tag{9}$$

Le système de référence associé à (S) dépend toujours de six paramètres arbitraires, mais ces paramètres une fois choisis, le système de référence associé à (Σ) est bien déterminé.

Remarquons encore que si, pour deux hypersurfaces (Σ), le coefficient p a la même valeur en deux points correspondants quelconques, ces deux hypersurfaces résultent l'une de l'autre par une transformation conforme, *puisque les coefficients b_i sont proportionnels*, et par suite, à notre point de vue, ces deux hypersurfaces ne sont pas distinctes.

On a enfin, en résolvant les équations (4),

$$\begin{aligned} 2u_i = {} & a_i(a_j + a_k + a_l) \\ & - (a_j a_k + a_j a_l + a_k a_l) - p(a_j + a_k + a_l - a_i) - p^2. \end{aligned} \tag{10}$$

5. La recherche des couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure, revient finalement à l'intégration du système de Pfaff

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \Omega &= 0, \\ \Omega_i &= \omega_i, \\ \Theta &= \theta, \\ \Pi_{ij} &= \varpi_{ij}, \\ \Psi_i &= a_i \omega_i, \\ \Upsilon_i &= \frac{k}{a_i + p} \omega_i, \\ X_i &= \gamma_i + u_i \omega_i, \end{aligned} \right.$$

où les a_i, k, p sont dix fonctions inconnues et où les u_i sont donnés par la formule (10).

La condition que les covariants bilinéaires de $\psi_i - a_i\omega_i$ et $\Psi_i - b_i\omega_i$ soient nuls pour toute solution du système (III), donne, d'après (I''),

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4}(a_\rho - a_i)[\omega_\rho \varpi_{\rho i}] \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_i),$$

$$\sum k\frac{a_\rho - a_i}{(a_\rho + p)(a_i + p)}[\omega_\rho \varpi_{\rho i}] \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_i),$$

d'où l'on déduit facilement, les quatre quantités $a_\rho + p$ étant toutes distinctes,

$$[\omega_j \varpi_{ji}] \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_i) \qquad (j \neq i).$$

Par suite, l'expression de Pfaff ϖ_{ij} ne dépend que de ω_i et ω_j, et l'on peut poser

$$\varpi_{ij} = \lambda_{ij}\omega_j - \lambda_{ji}\omega_i; \tag{11}$$

on a alors d'après (I')

$$\left\{\begin{aligned} &da_i + a_i\theta - \chi \equiv \sum_{\rho \neq i}(a_\rho - a_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho \qquad (\text{mod}\ \omega_i),\\ &db_i + b_i\theta - X \equiv \sum_{\rho \neq i}(b_\rho - b_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho \qquad (\text{mod}\ \omega_i).\end{aligned}\right. \tag{12}$$

En remplaçant dans la seconde équation (12) b_i par sa valeur $\dfrac{k}{a_i + p}$, on obtient

$$\begin{aligned}(13)\quad &(a_i + p)\,dk - k\,dp\\ &\equiv (a_i + p)^2 X + k\chi - k(2a_i + p)\theta + k\sum_{\rho \neq i}\frac{(a_\rho - a_i)^2\lambda_{\rho i}}{a_\rho + p}\omega_\rho\\ &\qquad (\text{mod}\ \omega_i).\end{aligned}$$

On peut enfin déterminer des quantités α_ρ, β_ρ, γ_ρ, telles qu'on ait, quels que soient les indices i et ρ,

$$(a_\rho - a_i)^2\lambda_{\rho i} = \alpha_\rho a_i^2 + \beta_\rho a_i + \gamma_\rho; \tag{14}$$

de sorte que l'équation (13) devient

$$(13') \quad (a_i+p)\,dk - k\,dp \equiv (a_i+p)^2 X + k\chi - k(2a_i+p)\theta + k\sum_{\rho\neq i}\frac{\alpha_\rho a_i^2+\beta_\rho a_i+\gamma_\rho a_i}{a_\rho+p}\omega_\rho \pmod{\omega_i}.$$

6. Supposons maintenant choisi complètement le système de référence associé à (S). Les expressions χ et θ deviennent, ainsi que X, des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, soit

$$(15) \quad \begin{cases} \chi = \Sigma c_\rho \omega_\rho, \qquad X = \Sigma \bar{c}_\rho \omega_\rho; \\ \theta = \Sigma t_\rho \omega_\rho. \end{cases}$$

Posons enfin

$$(16) \quad \begin{cases} dk = \Sigma k_\rho \omega_\rho, \\ dp = \Sigma p_\rho \omega_\rho. \end{cases}$$

La relation (13′) donne alors

$$(17) \quad (a_i+p)k_\rho - kp_\rho = (a_i+p)^2\bar{c}_\rho + kc_\rho - k(2a_i+p)t_\rho + k\sum\frac{\alpha_\rho a_i^2+\beta_\rho a_i+\gamma_\rho}{a_\rho+p},$$

où l'on suppose les indices i et ρ différents.

Cette relation (17) a lieu quand on remplace successivement a_i par les trois coefficients a différents de a_ρ et, comme elle est du second degré en a_i, elle est une *identité*. Exprimons en particulier qu'elle est vérifiée, ainsi que sa dérivée première, pour $a_i = -p$. Nous obtenons

$$(18) \quad \begin{cases} p_\rho = -c_\rho - pt_\rho - \dfrac{\alpha_\rho p^2 - \beta_\rho p + \gamma_\rho}{a_\rho+p} \\ k_\rho = -2kt_\rho + k\dfrac{\beta_\rho - 2p\alpha_\rho}{a_\rho+p} \end{cases} \qquad (\rho = 1, 2, 3, 4).$$

L'égalité (9) différentiée donne alors, en appelant $\bar{a}_\rho$ le coefficient de ω_ρ dans da_ρ, et en tenant compte de (18) et de (12),

$$(19) \quad \frac{\alpha_\rho a_\rho^2+\beta_\rho a_\rho+\gamma_\rho}{(a_\rho+p)^2} - \frac{\bar{a}_\rho - c_\rho + a_\rho t_\rho - \beta_\rho - 2\alpha_\rho a_\rho + \sum\limits_{i\neq\rho}\dfrac{\alpha_\rho a_\rho^2+\beta_\rho a_\rho+\gamma_\rho}{a_\rho - a_i}}{a_\rho+p} = 0.$$

Dans cette relation, p entre au premier degré, de sorte que si elle est vérifiée pour deux valeurs distinctes de p, elle est vérifiée identiquement.

7. Cherchons d'abord si à l'hypersurface (S) on peut faire correspondre deux hypersurfaces (Σ) *distinctes*, c'est-à-dire pour lesquelles la fonction p a deux valeurs différentes. La relation (19) est alors vérifiée identiquement et l'on a

$$(20)\qquad \begin{cases} \alpha_\rho a_\rho^2 + \beta_\rho a_\rho + \gamma_\rho = 0, \\ \overline{a}_\rho - c_\rho + a_\rho t_\rho - \beta_\rho - 2\alpha_\rho a_\rho = 0. \end{cases}$$

Les formules (18) donnent pour dp une expression linéaire en p, c'est-à-dire que p satisfait à une équation aux différentielles totales de la forme

$$dp = p\,\Sigma\,\lambda_\rho \omega_\rho + \Sigma\,\mu_\rho \omega_\rho,$$

où les coefficients λ_ρ et μ_ρ sont bien déterminés. Il en résulte que si cette équation aux différentielles totales n'est pas complètement intégrable, elle admet *une solution au plus*, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'équation étant complétement intégrable, sa solution générale est de la forme

$$p = u + Cv,$$

où C est la constante d'intégration. Les hypersphères de courbure de (S) étant

$$A + a_i M,$$

on peut choisir M et A de manière à remplacer a_i par $\frac{a_i + u}{v}$: la valeur de p est alors une *constante arbitraire*.

On peut donc choisir les systèmes de référence de manière à supposer

$$dp = 0:$$

le système de référence associé à (S) dépend encore de quatre paramètres arbitraires, ceux qui sont nécessaires pour achever la détermination de A_1, A_2, A_3, A_4; ces paramètres une fois choisis, le système de référence associé à (Σ) est bien déterminé. On peut enfin choisir ces paramètres de manière à annuler θ; les deux systèmes de référence sont alors déterminés sans aucune ambiguïté.

Finalement, en tenant compte des conventions précédentes,

on a

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} t_\rho &= 0,\\ \alpha_\rho &= 0,\\ \beta_\rho &= c_\rho,\\ \gamma_\rho &= -a_\rho c_\rho,\\ \overline{a}_\rho &= 2c_\rho. \end{aligned}\right.$$

puis, d'après (14) et (12),

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda_{\rho i} &= \frac{c_\rho}{a_i - a_\rho},\\ da_i &= 2c_i\omega_i. \end{aligned}\right.$$

On en déduit enfin

$$\chi = \frac{1}{2}\sum da_\rho.$$

Comme θ est nulle et χ une différentielle exacte, les équations (2) montrent que l'on a

$$\sum_\rho [\omega_\rho \chi_\rho] = 0,$$

$$\sum_\rho a_\rho [\omega_\rho \chi_\rho] = 0.$$

c'est-à-dire que l'expression χ_i ne dépend que de ω_i, soit

$$(23)\qquad \chi_i = w_i\omega_i.$$

Si nous exprimons que $c_i\omega_i = \frac{1}{2}da_i$ est une différentielle exacte, nous obtenons

$$(24)\qquad dc_i = c_i'\,\omega_i - \sum_{\rho \neq i} \frac{c_i - c_\rho}{a_i - a_\rho}\,\omega_\rho.$$

8. Partons maintenant de l'égalité (11), qui s'écrit

$$(11')\qquad \varpi_{ij} = \frac{c_i}{a_j - a_i}\,\omega_j - \frac{c_j}{a_i - a_j}\,\omega_i.$$

et exprimons que les coefficients de $[\omega_i\omega_j]$ dans les covariants bilinéaires des deux membres sont égaux; nous obtenons

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\frac{c_i' - c_j'}{a_j - a_i} + 3\,\frac{c_i^2 + c_j^2}{(a_i - a_j)^2}\\ &\quad + \sum_{\rho \neq i,j} \frac{c_\rho^2}{(a_i - a_\rho)(a_j - a_\rho)} + a_i a_j + w_i - w_j = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons éliminer les c'_i et les w_i entre les six équations (25) en les multipliant respectivement par $(a_i - a_j)(a_k - a_l)$, où les indices i, j, k, l forment une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. Il vient alors, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}(a_2 - a_3)^2 (a_2 - a_4)^2 (a_3 - a_4)^2 c_1^2 &+ (a_1 - a_3)^2 (a_1 - a_4)^2 (a_3 - a_4)^2 c_2^2 \\ &+ (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_4)^2 (a_2 - a_4)^2 c_3^2 \\ &+ (a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 c_4^2 = 0.\end{aligned}$$

Cela n'est possible que si tous les c_i sont nuls. Mais alors les équations (25) conduisent facilement à des relations telles que

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc il *est impossible que l'hypersurface* (S) *admette une représentation conforme sur plus d'une hypersurface* (Σ) *distincte de* (S). En particulier *il est impossible que* (S) *admette une déformation continue dans l'espace conforme.*

9. La fonction p n'ayant qu'une valeur possible on peut, en prenant l'hypersphère $A - pM$ comme nouvelle hypersphère A, supposer $p = 0$. On peut de plus choisir le facteur arbitraire qui entre dans les coordonnées de M de manière à avoir

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = 1; \tag{26}$$

on a alors

$$k = 1,$$
$$b_i = \frac{1}{a_i}.$$

On peut enfin, comme plus haut, supposer choisies les hypersphères A de manière à annuler θ, les systèmes de référence étant alors complètement déterminés. La formule (17) donne dans ces conditions

$$(a_\rho - a_i)^2 \lambda_{\rho i} = - a_\rho (c_\rho + a_i^2 \bar{c}_\rho), \tag{27}$$

d'où, en tenant compte de (12) et (26),

$$\frac{da_i}{a_i} = \sum_{\rho \neq i} \frac{c_\rho + a_i a_\rho \bar{c}_\rho}{a_i - a_\rho} \omega_\rho + \sum_{\rho \neq i} \frac{c_i + a_i a_\rho \bar{c}_i}{a_i - a_\rho} \omega_i. \tag{28}$$

Avant d'aller plus loin, résumons les résultats obtenus. La recherche des couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) admettant une représentation conforme l'une sur l'autre revient à l'intégration du système de Pfaff

$$
(\mathrm{IV})\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega &= 0,\\
\Omega &= 0,\\
\Omega_i &= \omega_i,\\
\Theta &= \theta,\\
\Pi_{ij} &= \varpi_{ij},\\
\psi_i &= a_i\,\omega_i,\\
\Psi_i &= \frac{1}{a_i}\,\omega_i,\\
X_i &= \chi_i + \frac{1}{2}(a_i a_j + a_i a_k + a_i a_l - a_j a_k - a_j a_l - a_k a_l)\,\omega_i,\\
\theta &= 0,\\
\chi &= \Sigma\, c_\rho\,\omega_\rho,\\
X &= \Sigma\, \bar{c}_\rho\,\omega_\rho.\\
\varpi_{ij} &= a_j\,\frac{c_j + a_i^2\,\bar{c}_j}{(a_i - a_j)^2}\,\omega_i - a_i\,\frac{c_i + a_j^2\,\bar{c}_i}{(a_i - a_j)^2}\,\omega_j,\\
\frac{da_i}{a_i} &= \sum_{\rho \neq i} \frac{c_\rho + a_i a_\rho \bar{c}_\rho}{a_i - a_\rho}\,\omega_\rho + \sum_{\rho \neq i} \frac{c_i + a_i a_\rho \bar{c}_i}{a_i - a_\rho}\,\omega_i,
\end{aligned}
\right.
$$

où les a_i, c_i, $\bar{c}_i$ sont des fonctions inconnues, les quatre premières ayant un produit égal à 1.

Pour toute solution de ce système, les covariants bilinéaires des deux membres de chacune de ses équations sont nuls. Il en est ainsi identiquement pour les 21 premières équations, la dernière étant

$$\Psi_4 = \frac{1}{a_4}\,\omega_4.$$

Il en est aussi de même pour les quatre équations suivantes, comme un calcul sans difficulté le montrerait.

Nous ne poursuivrons pas l'étude du système (IV). Nous nous contenterons de chercher les couples d'hypersurfaces (S) et (Σ) jouissant de la propriété que *les trois premières familles de lignes de courbure soient, pour chacune de ces hypersurfaces, formées de circonférences.*

10. Exprimons d'abord que la première famille de lignes de courbure de (S) est formée de circonférences. Cela veut dire que, quand on se déplace en laissant ω_2, ω_3, ω_4 nuls, il existe une circonférence fixe passant par M et normale à A_1. Cette circonférence est l'intersection de quatre hypersphères de la forme

$$A + \rho M, \quad A_2 + \rho_2 M, \quad A_3 + \rho_3 M, \quad A_4 + \rho_4 M.$$

Or l'on a, en supposant $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$,

$$\begin{aligned}
d(A + \rho M) &= (\rho - a_1)\omega_1 A_1 + (d\rho - c_1\omega_1)M,\\
d(A_2 + \rho_2 M) &= (\rho_2 + \lambda_{21})\omega_1 A_1 + (d\rho_2 - \chi_2)M,\\
d(A_3 + \rho_3 M) &= (\rho_3 + \lambda_{31})\omega_1 A_1 + (d\rho_3 - \chi_3)M,\\
d(A_4 + \rho_4 M) &= (\rho_4 + \lambda_{41})\omega_1 A_1 + (d\rho_4 - \chi_4)M.
\end{aligned}$$

Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned}
da_1 &\equiv c_1\omega_1 && (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4),\\
d\lambda_{i1} + \chi_i &\equiv 0 && (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4) \qquad (i = 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

Si l'on veut que la même propriété appartienne à (Σ), il faudra qu'on ait en particulier

$$\frac{da_1}{a_1^2} \equiv \bar{c}_1\omega_1 \qquad (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4),$$

d'où

$$c_1 + a_1^2\bar{c}_1 = 0. \tag{29}$$

Mais les formules (28) donnent, en tenant compte de (29),

$$\frac{da_1}{a_1} \equiv -3a_1\bar{c}_1\omega_1 \qquad (\text{mod } \omega_2, \omega_3, \omega_4);$$

il faut donc qu'on ait

$$c_1 = \bar{c}_1 = 0.$$

Il est impossible que les quatre familles de lignes de courbure soient, pour chacune des deux hypersurfaces (S) et (Σ), formées de circonférences, car alors les c_i et les $\bar{c}_i$ étant tous nuls, on aurait

$$\varpi_{ij} = 0,$$

d'où

$$[\omega_j\chi_i] - [\omega_i\chi_j] - [\psi_i\psi_j] = 0;$$

χ_i serait de la forme $w_i\omega_i$, avec

$$w_i + w_j + a_i a_j = 0,$$

relations qui donneraient

$$(a_i - a_j)(a_k - a_l) = 0.$$

Supposons donc que les trois premières familles de lignes de courbure soient formées de circonférences. Réservons la lettre i pour désigner un des indices 1, 2, 3. On a alors à intégrer le système

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned}
\omega &= 0,\\
\Omega &= 0,\\
\Omega_i &= \omega_i,\\
\Omega_4 &= \omega_4,\\
\Theta &= \theta,\\
\Pi_{ij} &= \varpi_{ij},\\
\Pi_{4i} &= \varpi_{4i},\\
\psi_i &= a_i\omega_i,\\
\psi_4 &= a_4\omega_4,\\
\Psi_i &= \frac{1}{a_i}\omega_i,\\
\Psi_4 &= \frac{1}{a_4}\omega_4,\\
X_i &= \chi_i + \frac{1}{2}(a_i a_j + a_i a_k + a_i a_4 - a_j a_k - a_j a_4 - a_k a_4)\omega_i,\\
X_4 &= \chi_4 + \frac{1}{2}(a_i a_4 + a_j a_4 + a_k a_4 - a_i a_j - a_i a_k - a_j a_k)\omega_i.\\
\theta &= 0,\\
\chi &= c_4\omega_4,\\
X &= \bar{c}_4\omega_4,\\
\varpi_{ij} &= 0,\\
\varpi_{4i} &= -a_4\frac{c_4 + a_i^2\bar{c}_4}{(a_i - a_4)^2}\omega_i,\\
\frac{da_i}{a_i} &= \frac{c_4 + a_i a_4\bar{c}_4}{a_4 - a_4}\omega_4.
\end{aligned}\right.$$

La considération de ϖ'_{ij} montre que χ_i ne dépend que de ω_i ; celle de θ' montre alors que χ_4 ne dépend que de ω_4 ; soit

$$(30)\qquad \chi_i = w_i\omega_i, \qquad \chi_4 = w_4\omega_4.$$

En égalant entre eux les covariants de χ et $c_4\omega_4$, ainsi que ceux de X et $\bar{c}_4\omega_4$, on voit que dc_4 et $d\bar{c}_4$ ne dépendent que de ω_4. Les covariants bilinéaires des deux membres des trois dernières équations (V) sont alors égaux d'eux-mêmes. En égalant enfin les covariants bilinéaires des deux membres des équations (V) relatives à ω_{ij} et ω_{4i}, on obtient

$$(31)\qquad \begin{cases} w_i + w_j + a_i a_j + \lambda_{4i}\lambda_{4j} = 0, \\ w_i + w_4 + a_i a_4 + \lambda_{4i}^2 + \lambda'_{4i} = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé pour abréger

$$d\lambda_{4i} = \lambda'_{4i}\omega_4.$$

Les solutions du système (V) satisfont donc au système complémentaire suivant

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{cases} \chi_i = w_i\omega_i, \\ \chi_4 = w_4\omega_4, \end{cases}$$

où les w_i et w_4 sont liées aux fonctions inconnues a_i, a_4, c_4, $\bar{c}_4$ par les relations (31); ce sont du reste des fonctions dont la différentielle ne dépend, comme les précédentes, que de ω_4. En posant

$$dw_i = \omega'_i\,\omega_4, \qquad dw_4 = \omega'_4\,\omega_4,$$

l'égalité des covariants bilinéaires des deux membres des équations (VI) donne

$$(32)\qquad w'_i = \lambda_{4i}(w_4 - w_i) - c_4 a_i.$$

Or ces relations sont des conséquences des relations (31); il suffit en effet de remarquer que les trois premières équations (31) déterminent w_1, w_2, w_3 et par suite w'_1, w'_2, w'_3. Les relations (32) sont donc des conséquences de (31) si, en différentiant les trois premières équations (31), on obtient des identités en tenant compte de (31) et (32); et c'est ce que montre un calcul facile.

11. Finalement, si l'on remarque que les équations (31) déterminent sans ambiguïté w_1, w_2, w_3, w_4 en fonction de a_1, a_2, a_3, c_4, $\bar{c}_4$, le problème revient à la détermination de ces cinq dernières fonctions inconnues. Comme $\omega'_4 = 0$, l'expression ω_4 est la différentielle d'une variable indépendante x, et *les cinq quantités* a_1, a_2,

a_3, c_4, $\bar{c}_4$ sont des fonctions de x définies par les cinq équations différentielles

$$(33)\quad \begin{cases} a'_i = a_i \dfrac{c_4 + a_i a_4 \bar{c}_4}{a_i - a_4}, \\ \lambda'_{41} - \lambda'_{43} + (\lambda_{41} - \lambda_{43})(\lambda_{41} + \lambda_{43} - \lambda_{42}) + (a_1 - a_3)(a_4 - a_2) = 0, \\ \lambda'_{42} - \lambda'_{43} + (\lambda_{42} - \lambda_{43})(\lambda_{42} + \lambda_{43} - \lambda_{41}) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_1) = 0, \end{cases}$$

où a_4 est mis pour $\frac{1}{a_1 a_2 a_3}$ et λ_{4i} pour sa valeur

$$\lambda_{4i} = -a_4 \frac{c_4 + a_i^2 \bar{c}_4}{(a_i - a_4)^2}.$$

La solution générale du problème proposé dépend donc de cinq constantes arbitraires, indépendamment des constantes qui fixent la position des hypersurfaces (S) *et* (Σ) *dans l'espace conforme.*

12. Les hypersurfaces (S) et (Σ) ainsi obtenues admettent une génération assez simple. Considérons en effet sur chacune d'elles les variétés à trois dimensions obtenues en faisant $\omega_4 = 0$, c'est-à-dire les variétés trajectoires orthogonales, sur les hypersurfaces, des lignes de courbure de la quatrième famille. Sur une de ces variétés, on a

$$(34)\quad \begin{cases} dM = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\ dA = -a_1 \omega_1 A_1 - a_2 \omega_2 A_2 - a_3 \omega_3 A_3, \\ dA_i = \omega_i(-w_i M - N - \lambda_{4i} A_4 + a_i A), \\ dA_4 = \lambda_{41} \omega_1 A_1 + \lambda_{42} \omega_2 A_2 + \lambda_{43} \omega_3 A_3, \\ dN = w_1 \omega_1 A_1 + w_2 \omega_2 A_2 + w_3 \omega_3 A_3. \end{cases}$$

On a de plus

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \omega'_3 = 0,$$

de sorte que ω_i est une différentielle exacte, soit dx_i.

Il résulte des formules (34) que l'hypersphère A_i ne dépend que du paramètre x_i, et l'on trouve facilement

$$\frac{d^2 A_i}{dx_i^2} = -(a_i^2 + \lambda_{4i}^2 + 2w_i) A_i.$$

Supposons par exemple les trois coefficients $a_i^2 + \lambda_{4i}^2 + 2w_i$ positifs (il pourrait y en avoir deux seulement de positifs, le troi-

sième étant nul ou négatif); on aura, en les appelant m_i^2,

$$A_i = \cos(m_i x_i) H_{2i-1} + \sin(m_i x_i) H_{2i},$$

où H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 sont six hypersphères *fixes* orthogonales entre elles et satisfaisant à

$$H_i | H_i = 1.$$

On en déduit

$$M = \sum_i \frac{1}{m_i} [\sin(m_i x_i) H_{2i-1} - \cos(m_i x_i) H_{2i}] + \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}} H_7,$$

où H_7 désigne une hypersphère fixe orthogonale aux six premières et satisfaisant à

$$H_7 | H_7 = -1.$$

Autrement dit on peut choisir, pour chaque trajectoire orthogonale des lignes de courbure de la quatrième famille, un système de référence tel que les coordonnées heptasphériques d'un point de la variété soient de la forme

$$(35) \qquad \begin{cases} x_{2i-1} = \dfrac{1}{m_i} \sin m_i x_i, \\ x_{2i} \quad = -\dfrac{1}{m_i} \cos m_i x_i. \\ x_7 \quad = \sqrt{\dfrac{1}{m_1^2} + \dfrac{1}{m_2^2} + \dfrac{1}{m_3^2}}. \end{cases}$$

Les coefficients m_i sont naturellement des fonctions du paramètre dont dépend la variété considérée. Ces variétés sont tout à fait analogues aux cyclides de l'espace à trois dimensions : ce sont de triples enveloppes d'hypersphères à un paramètre.

13. Les hypersurfaces (S) qui satisfont au système (IV) font partie d'une catégorie plus générale d'hypersurfaces, à savoir celles qui admettent des *variétés de courbure* à trois dimensions, c'est-à-dire des variétés remplissant toute l'hypersurface et contenant trois des lignes de courbure de l'hypersurface : ce sont encore les trajectoires orthogonales des lignes de courbure de la dernière famille. Ces variétés à trois dimensions existent; on a, en effet,

d'après (11),

$$\omega'_i = [\theta\omega_i] + \sum_\rho \lambda_{\rho i}[\omega_\rho \omega_i],$$

ce qui prouve que l'équation $\omega_i = 0$ est complètement intégrable. Sa solution générale fournit les variétés de courbure de la i^{eme} famille.

Les hypersurfaces qui font partie d'un système quintuple orthogonal jouissent toutes de cette propriété.

Cherchons à déterminer les hypersurfaces les plus générales qui en jouissent. En les supposant rapportées à leurs lignes de courbure, il faudra que les quatre équations $\omega_i = 0$ soient complètement intégrables. Or on a

$$\omega'_i = [\theta\omega_i] + \Sigma[\omega_\rho \varpi_{\rho i}];$$

posons

$$\varpi_{ij} = \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \lambda_{ij\rho}\omega_\rho$$

avec

$$\lambda_{ij\rho} + \lambda_{ji\rho} = 0 \qquad (i \neq j); \tag{36}$$

nous devrons avoir, en exprimant que le coefficient de $[\omega_j \omega_k]$ dans ω'_i est nul.

$$\lambda_{jik} - \lambda_{kij} = 0 \qquad (i \neq j \neq k). \tag{37}$$

En appliquant successivement les relations (36) et (37), on obtient

$$\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik} = -\lambda_{kij} = \lambda_{ikj} = \lambda_{jki} = -\lambda_{kji} = -\lambda_{ijk};$$

par suite tous les coefficients λ_{ijk} à trois indices différents sont nuls. On a donc la formule (11)

$$\varpi_{ij} = \lambda_{ij}\omega_j - \lambda_{ji}\omega_i.$$

La recherche des hypersurfaces en question revient donc à l'intégration du système de Pfaff

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} \omega = 0, \\ \psi_i - a_i\omega_i = 0, \\ \varpi_{ij} - \lambda_{ij}\omega_j + \lambda_{ji}\omega_i = 0. \end{cases}$$

Or si l'on forme les covariants bilinéaires des premiers membres

de ces équations en tenant compte de ces équations elles-mêmes, on trouve

$$
(\mathrm{VII}')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\omega' = 0,\\
&(\psi_i - a_i\omega_i)' = \left[\omega_i\left(da_i + a_i\theta - \chi - \sum_\rho (a_\rho - a_i)\lambda_{\rho i}\omega_\rho\right)\right],\\
&(\varpi_{ij} - \lambda_{ij}\omega_j + \lambda_{ji}\omega_i)'\\
&\quad = \left[\omega_j\left(d\lambda_{ij} + \chi_i + \lambda_{ij}\theta + \frac{1}{2}(a_i a_j + \Sigma\lambda_{\rho i}\lambda_{\rho j})\omega_i + \Sigma(\lambda_{ij} - \lambda_{i\rho})\lambda_{\rho j}\omega_\rho\right)\right]\\
&\qquad - \left[\omega_i\left(d\lambda_{ji} + \chi_j + \lambda_{ji}\theta + \frac{1}{2}(a_i a_j + \Sigma\lambda_{\rho i}\lambda_{\rho j})\omega_j + \Sigma(\lambda_{ji} - \lambda_{j\rho})\lambda_{\rho i}\omega_\rho\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les seconds membres des formules (VII′) sont de la forme

$$
(\mathrm{VII}'')\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\omega_i \Pi_i],\\
&[\omega_j \Pi_{ij}] - [\omega_i \Pi_{ji}],
\end{aligned}
\right.
$$

où les 16 expressions Π_i, Π_{ij} sont linéairement indépendantes entre elles et indépendantes des ω_i. Il résulte facilement de là que le système (VII) est en involution et l'on peut non moins facilement trouver le degré d'indétermination de ses solutions. Il suffit pour cela d'appliquer la théorie générale des systèmes en involution. Désignons par α_i, α'_i, α''_i, ..., des systèmes de quatre arbitraires et considérons un premier système d'équations linéaires en Π_i, Π_{ij},

$$
\begin{aligned}
\alpha_i \Pi_i &= 0,\\
\alpha_j \Pi_{ij} - \alpha_i \Pi_{ji} &= 0;
\end{aligned}
$$

il contient $s_1 = 10$ équations linéairement indépendantes. Le système obtenu en ajoutant aux équations précédentes les suivantes

$$
\begin{aligned}
\alpha'_i \Pi_i &= 0,\\
\alpha'_j \Pi_{ij} - \alpha'_i \Pi_{ji} &= 0
\end{aligned}
$$

contient en tout $s_1 + s_2 = 10 + 6$ équations linéairement indépendantes. Le système suivant obtenu en utilisant les α''_i ne contiendrait évidemment pas d'équations nouvelles. Au système de Pfaff (VII) sont donc associés les entiers

$$
s_1 = 10, \qquad s_2 = 6, \qquad s_3 = 0, \qquad s_4 = 0,
$$

et le système sera en involution si les formules qui donnent les

Π_i et les Π_{ij} en fonctions linéaires des ω_i de manière à annuler les expressions (VII′) dépendent de

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 22$$

paramètres arbitraires; or c'est ce qui se vérifie immédiatement.

Le système (VII) *est donc complètement intégrable et sa solution générale dépend de* $s_2 = 6$ *fonctions arbitraires de deux arguments.* L'hypersurface la plus générale de l'espace à cinq dimensions dépend au contraire d'une fonction arbitraire de quatre arguments.

La même méthode s'applique encore plus facilement au système de Pfaff qui donne les systèmes n — uples orthogonaux dans l'espace à n dimensions; elle conduit immédiatement à la conclusion que le système le plus général dépend de $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux arguments.

SUR LA RÉPARTITION PROBABLE ET LES FLUCTUATIONS DES DISTANCES MUTUELLES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS, DROITES ET PLANS;

Par M. Émile Borel.

1. *Remarques préliminaires.* — Avant d'aborder les problèmes de probabilités continues qui font l'objet de cette Note, nous exposerons quelques remarques qui s'appliquent à tous les problèmes de probabilité et, pour plus de netteté, nous prendrons comme exemple des problèmes de probabilités discontinues.

Considérons les 1000 nombres de 3 chiffres compris entre 000 et 999; soit 000, 001, etc. Les 1000 nombres ainsi écrits comprennent 3000 chiffres, parmi lesquels 300 chiffres 7; il y a, sur les 1000 nombres, 243 renfermant 1 chiffre 7; 27 renfermant 2 chiffres 7; 1 renfermant 3 chiffres 7, en tout 271 nombres renfermant au moins 1 chiffre 7 et 729 n'en renfermant aucun. Ceci posé, nous allons étudier le problème suivant : « Un nombre de

3 chiffres est tel qu'*on sait* qu'il renferme au moins 1 chiffre 7; quelle est la probabilité pour qu'il en renferme précisément 1, ou 2, ou 3. » L'énoncé peut être compris de deux manières, auxquelles correspondent deux solutions différentes A et B.

A. Le nombre a été choisi au hasard parmi les 271 nombres qui renferment au moins un 7. Les probabilités demandées sont alors :

$$\frac{243}{271} = 0,89668;$$

$$\frac{27}{271} = 0,09963;$$

$$\frac{1}{271} = 0,00369.$$

L'espérance mathématique du joueur qui toucherait 1^{fr} pour chaque chiffre 7 serait

$$\frac{300}{271} = 1,107.$$

B. On a choisi au hasard un des 300 chiffres 7 qui se trouvent parmi les 3000 chiffres des 1000 nombres et le nombre choisi est celui auquel appartient ce chiffre 7. En ce cas les deux chiffres inconnus forment un nombre *quelconque* de deux chiffres compris entre 00 et 99; parmi ces 100 nombres, 81 ne renferment aucun 7, 18 en renferment un, 1 en renferme deux : les probabilités sont donc

0,81	au lieu de	0,89668;
0,18	»	0,09963;
0,01	»	0,00369.

et l'espérance mathématique du joueur qui reçoit 1^{fr} par chiffre 7 est

1,2 au lieu de 1,107.

On voit que la différence essentielle entre A et B est la suivante : dans A, le fait d'avoir un chiffre 7 diminue les chances pour que les autres chiffres soient des 7; dans B ces chances sont intégralement conservées.

La distinction entre ces deux points de vue est parfois assez subtile; mais, faute de la saisir, on est exposé à des erreurs dans les évaluations des probabilités.

Considérons, par exemple, le nombre décimal égal à $\sqrt{2}$; dans l'état actuel de la science, nous ne connaissons aucune loi pour les chiffres décimaux successifs; de sorte que, si un chiffre nous est inconnu, nous devons regarder la probabilité pour qu'il soit un 7 comme égale à 0,1. Considérons les chiffres dont le rang après la virgule sont égaux à 1 000 001, 1 000 002, etc., jusqu'à 1 000 100. Ces 100 chiffres nous sont entièrement inconnus; nous devons donc considérer que, pour chacun d'eux, la probabilité pour qu'il soit un 7 est 0,1; le nombre probable des chiffres 7 parmi ces 100 chiffres est 10.

Si un mathématicien, par une méthode nouvelle et inconnue dont il a gardé le secret, calcule ces 100 chiffres et garde secret le résultat de son calcul, deux joueurs pourront engager des paris sur la valeur de ces chiffres et le prendre comme arbitre; le jeu sera équitable si l'un d'eux verse 1^{fr} en pariant que le 54e de ces chiffres, par exemple, est un 7 et reçoit 10^{fr} dans le cas où il aura deviné juste. Comme les probabilités relatives aux divers chiffres sont indépendantes, le joueur, après avoir gagné ou perdu son pari sur le 54e chiffre, pourra parier dans les mêmes conditions pour le 63e, ou pour le 26e, et ainsi de suite, s'il lui convient, jusqu'à ce qu'il ait épuisé les 100 chiffres. Nous nous trouvons ici dans l'hypothèse B. Voici ce qui correspond à l'hypothèse A. Admettons que le mathématicien qui possède les valeurs des 100 chiffres ait inscrit sur un carnet les numéros d'ordre des chiffres qui sont des 7; par exemple 27e, 35e, 43e, 58e, etc., et qu'un joueur indiscret ayant jeté les yeux sur ce carnet ait ainsi appris que le 43e chiffre est un 7. Il va de soi que s'il parie pour ce 43e chiffre, sa probabilité 0,1 de gagner devient la certitude (probabilité 1); mais s'il parie pour un autre rang, par exemple pour le 42e ou le 53e, sa probabilité de gagner se trouve diminuée et n'est plus que de

$$\frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

au lieu d'être

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Cette affirmation peut paraître paradoxale, car au premier abord on ne voit pas bien la différence qu'il y a entre apprendre que le

43e chiffre est un 7 au moyen du carnet indiscrètement consulté, ou de l'apprendre en pariant qu'il en est ainsi et en gagnant son pari; or, dans ce cas nous avons affirmé que le gain d'un pari ne modifiait en rien les probabilités pour les autres paris. La différence est la suivante : lorsque le joueur indiscret a consulté le carnet, il a pu, par hypothèse, connaître le rang de l'un des chiffres 7 qui se trouvent parmi les 100 chiffres considérés; si donc un rang, tel que le 68e, n'a pas été vu par lui, cela diminue la probabilité pour que ce soit le rang d'un chiffre 7. A un autre point de vue, on peut observer que si l'on néglige (1) l'hypothèse très peu probable où il n'y aurait *aucun* chiffre 7, le fait d'apprendre le rang d'un des chiffres 7 qui existent n'augmente pas le nombre total probable de ces chiffres 7 ; si, au contraire, un joueur non prévenu parie que le 43e chiffre est un 7 et gagne son pari, il est en droit de penser que sur les 99 chiffres restants, la proportion des 7 est encore $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire le nombre probable de 7 égal à 9,9, le nombre probable total étant dès lors 10,9 au lieu de 10.

2. *La répartition des points sur un segment de droite.* — Nous dirons que n points sont distribués au hasard sur un segment de longueur l si la probabilité pour chacun d'eux de se trouver sur un élément dx est égale à $\frac{dx}{l}$. Étudier les propriétés d'une telle distribution revient à étudier statistiquement les propriétés des A^n distributions que l'on obtiendrait en divisant l en A parties égales et en plaçant de toutes les manières possibles les n points chacun dans une de ces portions, A étant supposé un nombre suffisamment grand pour que deux positions intérieures à une même portion $\frac{l}{A}$ soient regardées comme indiscernables. Il est souvent plus commode de parler le langage de la probabilité

(1) Comme nous l'avons fait d'ailleurs en évaluant la probabilité $\frac{1}{11}$. Notre raisonnement est, en effet, le suivant : l'espérance mathématique d'un joueur qui mise 1fr sur chacun des 100 rangs et qui reçoit 10fr pour chacun des chiffres 7 est précisément égale à 100. Or, le joueur indiscret payera 10fr sans risques de perte le pari fait sur le 43e chiffre; son espérance mathématique est donc 90fr pour les 99 autres paris; la probabilité est donc bien le quotient de 9 par 99.

que celui de la statistique, mais on ne doit jamais perdre de vue que la statistique est le seul fondement concret du langage des probabilités et que l'on doit y recourir dans tous les cas litigieux [1].

Au lieu de considérer n points sur un segment l, on peut admettre qu'il y a *en moyenne* n points sur le segment l. Cela signifie que h étant très grand, il y a hn points sur un segment hl qui comprend le segment considéré; le cas limite $h = \infty$ donne les formules les plus simples. Les probabilités pour que les nombres des points situés sur le segment l soient respectivement égaux à 0, 1, 2, ... sont les termes successifs de la série [2].

$$e^{-n}\left[1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^p}{p!} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire que la probabilité pour qu'il y ait précisément p points est

$$P(p) = e^{-n}\frac{n^p}{p!}.$$

Le nombre moyen des points est, par définition,

$$\Sigma\, p\, P(p) = n.$$

On retrouve n, comme cela devait être. Mais le carré moyen du nombre des points n'est pas n^2; car on a

$$\Sigma\, p^2\, P(p) = \Sigma\, p(p-1)\, P(p) + \Sigma\, p\, P(p) = n^2 + n.$$

De même, le nombre des segments dont deux points sont des extrémités et situés sur l est égal à $\frac{p(p-1)}{2}$ dans le cas où il y a p points; le nombre moyen est donc

$$\sum \frac{p(p-1)}{2}\, P(p) = \frac{n^2}{2}.$$

---

(1) Nous laissons ici de côté la difficulté suivante, en nous contentant de la signaler : les définitions statistiques que l'on obtient par deux modes de division différents (par exemple en 2^n ou en 3^n parties égales, n croissant indéfiniment) *sont-elles équivalentes*? Cette difficulté est particulièrement intéressante à étudier dans un domaine, tel que la surface de la sphère, où il n'est pas possible de considérer des divisions régulières.

(2) *Voir* Émile Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Note V.

Ce nombre est donc légèrement supérieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. On peut obtenir ce résultat par un raisonnement direct : si l'on a hn points sur un segment hl, le nombre des segments formés par ces points pris deux à deux est

$$N = \frac{hn(hn-1)}{2}.$$

Pour qu'un de ces N segments soit tout entier sur le segment l considéré, il faut et il suffit que chacune de ses extrémités y soit; la probabilité est $\frac{1}{h}$ pour chacune d'elles et $\frac{1}{h^2}$ pour les deux (ces probabilités sont indépendantes); le nombre probable des segments est donc

$$\frac{N}{h^2} = \frac{1}{2} n \left(n + \frac{1}{h}\right).$$

Dans le cas limite où h est ∞, on retrouve bien $\frac{n^2}{2}$.

3. *Les fluctuations de la répartition des points sur un segment de droite.* — Nous avons vu que si un segment l renferme en moyenne n points, ce qui correspond à une densité moyenne σ :

$$\sigma = \frac{n}{l},$$

la probabilité pour qu'il en renferme p est

$$P(p) = e^{-n} \frac{n^p}{p!}.$$

La moyenne de la valeur absolue de l'écart entre le nombre moyen n et le nombre réel p est

$$\sum_{p=0}^{\infty} |n-p| P(p).$$

Pour évaluer cette somme, nous la décomposerons. On a d'abord :

$$\sum_{p=0}^{p=n} (n-p) P(p) = n \sum_{p=0}^{p=n} P(p) - \sum_{p=0}^{p=n-1} n P(p).$$

car

$$p P(p) = n P(p-1).$$

On a donc

$$\sum_{p=0}^{p=n}(n-p)\,P(p) = n\,P(n).$$

On trouverait de même

$$\sum_{p=n+1}^{\infty}(p-n)\,P(p) = n\,P(n).$$

La valeur moyenne des valeurs absolues des écarts est donc

$$2n\,P(n) = 2n\frac{n^n}{n!}e^{-n}.$$

Or la formule de Stirling donne

$$\frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{1+\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi n}},$$

le nombre ε_n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; la valeur moyenne des valeurs absolues des écarts est donc

$$M(|n-p|) = \frac{2n}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

On trouverait par un calcul analogue que la moyenne des carrés des écarts est n

$$M(n-p)^2 = n.$$

La densité moyenne est σ; la densité vraie est σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{p}{l}.$$

La fluctuation moyenne de la densité $M(|\sigma_1 - \sigma|)$ peut se calculer en fonction de σ et de l

$$M(|\sigma_1-\sigma|) = \frac{M(|n-p|)}{l} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2l\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{l\pi}}.$$

La valeur de la fluctuation peut se déduire des résultats connus de la théorie des probabilités continues. On sait que sur N épreuves, la probabilité de l'événement favorable étant p et la probabilité de l'événement contraire $q = 1 - p$, l'unité d'écart λ

est donnée par la formule [1]

$$\lambda = \sqrt{2Npq}$$

et l'écart moyen est

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}.$$

Ici, on doit supposer que N augmentant indéfiniment p tend vers zéro de telle manière que le produit Np soit égal à n. On a donc $q = 1$ et

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

4. *Les distances mutuelles des points répartis au hasard sur un segment.* — Si un segment de longueur l renferme n points, le nombre des distances mutuelles de ces points deux à deux est $\frac{n(n-1)}{2}$; si ce même segment renferme *en moyenne* n points, le nombre moyen des distances mutuelles est, comme nous l'avons vu, $\frac{n^2}{2}$.

Parmi ces distances, combien y en a-t-il qui sont inférieures à une longueur donnée ε?

Posons

$$\varepsilon = kl.$$

La probabilité pour que la distance des deux points compris sur le segment l soit inférieure à kl est

$$2k - k^2 = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}.$$

Le nombre probable des distances inférieures à ε est donc, suivant que l'on suppose qu'il y a précisément n points ou qu'il y a en moyenne n points,

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{n^2}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

---

[1] *Voir* Borel, *Éléments de la théorie des probabilités.*

J'omets les formules que l'on obtiendrait en recherchant le nombre des distances comprises entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, ou entre ε_1 et ε_2 et aussi les formules où l'on introduirait au lieu de n la densité σ définie par $n = l\sigma$.

On pourrait objecter à la démonstration précédente qu'elle suppose que les distances sont indépendantes, hypothèse non exacte. En réalité, cette objection n'est pas fondée : si nous appelons les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, un joueur peut parier que la distance A_iA_j est inférieure à ε; s'il doit payer $2k - k^2$ pour recevoir 1 en cas de gain, il joue un jeu équitable. Si $\frac{n(n-1)}{2}$ joueurs font un pari analogue pour chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ distances, chacun d'eux joue un jeu équitable. Un seul parieur peut se substituer à eux sans que le jeu cesse d'être équitable : la dépendance mutuelle des distances ne joue pas de rôle.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat par un raisonnement direct. Plaçons-nous dans le cas où il y a précisément n points et désignons-les par $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Plaçons le point A_1 et entourons-le d'un intervalle de dimensions 2ε dont ce point est le milieu. Si la distance du point A_1 aux extrémités du segment l est inférieure à ε, ce segment 2ε sera tout entier à l'intérieur de l; sinon, une portion seulement sera intérieure à l; cette portion, que nous appellerons *la portion utile*, a pour longueur probable

$$2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}.$$

Ceci veut dire que si l'on considère un grand nombre de segments identiques sur lesquels A_1 occupe successivement toutes les positions possibles, telle est la longueur moyenne des portions utiles.

Plaçons maintenant le point A_2 : s'il tombe dans la portion utile du segment qui entoure A_1, la longueur A_1A_2 sera inférieure à ε; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$\frac{1}{l}\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right) = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}.$$

Quoi qu'il en soit, entourons de même A_2 d'un segment 2ε dont la portion utile aura la même longueur probable. La somme des

deux portions utiles est

$$2\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right).$$

Il peut arriver qu'elles empiètent l'une sur l'autre; mais si l'on place le point A_3, l'espérance mathématique du joueur qui recevrait autant d'unités de valeur qu'il y a de segments auxquels appartient A_3 est

$$\frac{2}{l}\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right) = 2\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

On verrait de même que l'espérance mathématique lorsque l'on place A_4 est

$$3\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right)$$

et, lorsque l'on place A_n,

$$(n-1)\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

L'espérance mathématique totale, ou le nombre probable des segments A_iA_j inférieurs à ε est donc

$$\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)\right]\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

On retrouve donc le même résultat.

Dans le cas où il y aurait *en moyenne* n points, il suffirait de faire le même calcul pour chaque valeur p et de prendre la moyenne comme au paragraphe 3.

Lorsqu'on donne la densité σ, sans fixer la longueur l du segment, on peut raisonner d'une manière un peu différente. Cherchons la densité des points A qui sont des extrémités de segments de longueur inférieure à ε. Dans une région donnée, la densité des points A est σ; c'est le nombre des points A par unité de longueur. Si A est un des points, la densité dans l'intervalle 2ε dont le milieu est A est encore σ, c'est-à-dire que le nombre moyen [1] des A′ est $2\varepsilon\sigma$; la densité des extrémités des

---

[1] On voit ici la différence entre l'hypothèse A et l'hypothèse B du paragraphe 1. Lorsqu'on supposait n points dans le segment l et que l'on fixait l'un d'eux, il n'en restait plus que $n-1$. Ici on part, non d'un segment 2ε fixé indépendamment des A, mais d'un A déterminé: il y a donc $2\varepsilon\sigma$ points A′ et non $2\varepsilon\sigma - 1$.

segments tels que AA′ est donc $2\varepsilon\sigma^2$; comme chaque segment a deux extrémités, la densité des segments est $\varepsilon\sigma^2$.

Si l'on prend $\varepsilon = l$, on trouve $l\sigma^2$, comme densité et $l^2\sigma^2$ comme nombre de segments inférieurs à l sur le segment l; or $l\sigma = n$, on en trouve donc n^2; le nombre moyen des segments intérieurs au segment l est $\frac{n^2}{2}$; les autres segments sont des segments qui chevauchent sur deux segments consécutifs de longueur l; ceux qui n'ont qu'une extrémité sur le segment l considéré comptent pour $\frac{1}{2}$.

En d'autres termes, il y a, sur un segment de longueur l, $2n^2$ extrémités de segments inférieurs ou égaux à l, à savoir n^2 extrémités correspondant aux $\frac{n^2}{2}$ segments intérieurs au segment donné et n^2 extrémités appartenant à des segments qui chevauchent sur ce segment et l'un des deux segments contigus.

On voit que l'on obtient exactement *la moitié* du nombre des segments inférieurs à l renfermés sur un segment Ml, M étant un entier quelconque, en divisant ce segment Ml en M segments l et en partant de cette remarque simple que tous les segments dont les deux extrémités sont intérieures à un même segment l ont une longueur au plus égale à l.

Cette remarque nous conduira de la manière la plus simple au calcul des fluctuations que nous allons aborder.

5. *Fluctuations des distances mutuelles de points en nombre fini sur une droite.* — Considérons des points répartis avec une densité σ sur une droite; la densité moyenne des segments de longueur inférieure ou égale à l est $\sigma^2 l$; quelles sont les fluctuations de cette densité? Pour nous en rendre compte, divisons la droite en segments fixes de longueur l: ils renferment en moyenne $n = \sigma l$ points et en réalité p points avec une probabilité $P(p)$; sur chacun d'eux se trouvent $\frac{p(p-1)}{2}$ segments de longueur inférieure à l au lieu de $\frac{n^2}{2}$, nombre moyen; la fluctuation moyenne est donc

$$\sum_0^\infty P(p)\left|\frac{p(p-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\right|.$$

Cette somme se calcule aisément ; car on a

$$p(p-1)\,P(p) = n^2\,P(p-2)$$

et par suite

$$\sum_{0}^{n} P(p)\left[\frac{n^2}{2} - \frac{p(p-1)}{2}\right] = \frac{n^2}{2}\left[P(n) + P(n-1)\right]$$

De même

$$\sum_{n+1}^{\infty} P(p)\left[\frac{p(p-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\right] = \frac{n^2}{2}\left[P(n) + P(n-1)\right].$$

Or

$$P(n) = P(n-1) = \frac{n^n}{n!}e^{-n}.$$

La fluctuation moyenne est donc en définitive

$$2n^2\frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{2n^2}{\sqrt{2\pi n}}(1+\varepsilon_n),$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$\sqrt{2n}\sqrt{\frac{n^2}{\pi}}.$$

D'après le calcul déjà fait pour les fluctuations du nombre des points, si les distances inférieures à l étaient indépendantes les unes des autres et réparties au hasard de telle manière qu'il y en eût en moyenne $N = \frac{n^2}{2}$ sur un segment l, les fluctuations moyennes de ce nombre N seraient

$$\sqrt{\frac{2N}{\pi}} = \sqrt{\frac{n^2}{\pi}}.$$

On voit que la fluctuation est multipliée par le facteur $\sqrt{2n}$ *du fait que les distances ne sont plus indépendantes;* s'il y a une accumulation fortuite de points dans une région, les distances inférieures à l'étendue de la région augmentent comme le carré du nombre de points accumulés.

J'omettrai le calcul direct un peu plus compliqué des fluctuations des distances inférieures à l qui chevauchent sur deux segments fixes contigus de dimensions l; ce calcul revient à celui de

la somme

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} P(p) P(q) |pq - n^2|.$$

On obtient une approximation largement suffisante par notre remarque d'après laquelle la moitié du nombre total des segments inférieurs à l est obtenue en prenant les segments intérieurs aux segments fixes de longueur l; dans deux segments fixes distincts, les positions sont indépendantes, et par suite, suivant la règle classique, la fluctuation se multiplie par la racine carrée du nombre des segments.

En résumé, si N est le nombre moyen des segments inférieurs à l dans une étendue quelconque, la fluctuation moyenne de ce nombre N est, non pas

$$\varphi = \sqrt{\frac{2N}{\pi}},$$

comme il résulterait des théories générales dans le cas où ces distances seraient indépendantes, mais

$$\varphi \sqrt{2n},$$

n étant le nombre moyen de points sur le segment l; $n = l\sigma$; la fluctuation peut donc s'écrire également

$$\varphi \sqrt{2l\sigma}.$$

6. *Les points dans le plan ou dans l'espace.* — Les détails dans lesquels nous sommes entrés dans le cas linéaire nous permettront d'être très brefs dans le cas des points répartis au hasard dans une région donnée de forme quelconque du plan ou de l'espace. La densité σ est ici le nombre moyen des points par unité de surface ou de volume. Dans une surface S ou un volume V, le nombre moyen des points est $n = \sigma S$ ou σV et le nombre réel est p avec la probabilité $P(p)$.

7. *Les distances mutuelles des points dans le plan ou dans l'espace.* — Le calcul du nombre moyen des distances mutuelles inférieures à un nombre donné l est tout à fait analogue au calcul fait dans le plan.

Dans une aire (un volume) égale à l'unité il y a σ points; chacun d'eux peut être regardé comme le centre d'un cercle (d'une sphère) de rayon l, la surface totale (le volume total) de ces cercles (sphères) est $\sigma\pi l^2$ $\left(\frac{4}{3}\sigma\pi l^3\right)$ et le nombre moyen des points intérieurs est $\sigma^2\pi l^2$ $\left(\frac{4}{3}\sigma^2\pi l^3\right)$; telle est la densité des *extrémités* de segments de dimensions $\leqq l$; chaque segment ayant deux extrétrémités, la densité moyenne des segments eux-mêmes est, dans le plan,

$$\frac{\sigma^2\pi l^2}{2}$$

et, dans l'espace,

$$\frac{2}{3}\sigma^2\pi l^3.$$

Dans un cercle (une sphère) de *diamètre* l, le nombre moyen des *extrémités* des segments s'obtient en multipliant la densité par la surface (le volume), c'est-à-dire par

$$\frac{\pi l^2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi l^3}{6},$$

ce qui donne

$$\frac{\sigma^2\pi^2 l^4}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{2\sigma^2\pi^2 l^6}{9}.$$

Or le nombre n des points intérieurs au cercle (à la sphère) de diamètre l est, en moyenne,

$$n = \sigma\frac{\pi l^2}{4}, \qquad n = \sigma\frac{\pi l^3}{6},$$

et le nombre moyen des segments obtenus en joignant ces n points deux à deux est $\frac{n^2}{2}$, le nombre des extrémités étant n^2, c'est-à-dire

$$\sigma^2\frac{\pi^2 l^4}{16} \quad \text{et} \quad \sigma^2\frac{\pi^2 l^6}{36}.$$

On voit que les nombres ainsi obtenus sont dans le plan le quart et dans l'espace le huitième du nombre moyen total des extrémités; le procédé qui donnait la moitié du nombre des segments inférieurs à l sur la droite en donne $\frac{1}{4}$ dans le plan et $\frac{1}{8}$ dans l'espace. Le calcul des fluctuations se ferait d'une manière analogue.

Pour une aire (un volume) de forme quelconque, le calcul du nombre moyen des segments intérieurs de dimensions inférieures à l est un problème de calcul intégral qui peut être assez compliqué; je me contenterai de reproduire ici les résultats qui m'ont paru les plus simples et les plus intéressants parmi ceux que j'ai calculés.

Probabilité pour que la distance de deux points intérieurs à un cercle de rayon R soit $\leqq a$:

$$\frac{\pi a^2 + \alpha(R^2 - a^2) - \sin\alpha\left(R^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{\pi R^2}$$

en posant

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}.$$

Pour une *sphère* de rayon R, l'expression est plus simple :

$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\frac{a^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{32}\frac{a^6}{R^6}.$$

Étant donné un polygone convexe tel qu'un segment de longueur a rencontre au plus deux côtés (y compris les prolongements), si l'on désigne par S la surface, par P le périmètre, par A, B, C, ... les angles, le nombre des segments de longueur inférieure à a entièrement intérieurs est proportionnel à

$$Ra^2S - \frac{2a^3}{3}P + \frac{a^4}{8}\sum \cot A(\pi - A + \operatorname{tang} A).$$

Pour un carré de côté l, cette formule devient

$$\pi a^2 l^2 - \frac{8a^3 l}{3} + \frac{a^4}{2}.$$

On pourrait calculer les fluctuations en décomposant en carrés ou cubes au lieu de considérer des cercles ou sphères.

8. *La répartition de droites ou plans.* — Je me contenterai d'indiquer les principes d'après lesquels des problèmes analogues peuvent être traités pour des droites dans le plan ou dans l'espace ou pour des plans dans l'espace.

Dans le plan, étant donnés une aire S et un angle α, considérons

les droites données dont les parallèles sont intérieures à l'angle α et qui coupent S; la somme des segments intérieurs à S étant L le rapport

$$\frac{L\pi}{S\alpha} = \sigma$$

est la densité moyenne des droites données dans S et α; cette densité a les dimensions de l'inverse d'une longueur.

Dans l'espace on considérera un angle solide α et un volume V et l'on prendra le rapport

$$\frac{2\pi L}{\alpha V}$$

dont les dimensions sont celles de l'inverse d'une surface.

Pour les plans distribués dans l'espace, on considérera ceux dont les normales sont intérieures à un angle solide α et qui coupent un volume V; la somme des surfaces découpées sur ces plans étant S, la densité moyenne σ est

$$\sigma = \frac{2S\pi}{\alpha V}.$$

On traiterait de la même manière que pour les points les problèmes concernant les probabilités et les fluctuations des plus courtes distances de droites distribuées dans une région de l'espace avec densité moyenne σ ou des distances de points de densité σ à des plans de densité σ'.

SUR DEUX POLYNOMES ASSOCIÉS AUX POLYNOMES DE LEGENDRE;

Par M. Pierre Humbert.

Soit $P_n(z)$, le polynome de Legendre d'ordre n. Nous définissons les deux polynomes $A_n(z)$, de degré $n-2$, et $B_n(z)$, de degré $n-1$, par l'identité

$$A_n(z)P_n(z) + B_n(z)P'_n(z) = 1.$$

que nous appellerons *identité fondamentale*. Nous nous proposons d'étudier les principales propriétés de ces polynomes, ainsi que de quelques autres que l'on peut en considérer comme des extensions [1].

I.

Premières remarques. — Le simple examen de l'identité fondamentale nous permet les remarques suivantes : A_n, qui est d'ordre $n-2$, ne contient que des termes d'ordres $n-2$, $n-4$, $n-6$, ...; B_n, au contraire, n'a que des termes d'ordres $n-1$, $n-3$, $n-5$, ...

A_0, A_1, et B_0 n'existent pas.

Les polynomes définis par les premières valeurs de n sont les suivants :

$$B_1 = 1;$$

$$A_2 = -2, \qquad B_2 = z;$$

$$A_3 = -5z, \qquad B_3 = \frac{5z^2-2}{3};$$

$$A_4 = -\frac{35z^2-8}{3}, \qquad B_4 = \frac{35z^3-23z}{12};$$

$$A_5 = -\frac{315z^3-147z}{12}, \qquad B_5 = \frac{315z^4-287z^2+32}{60},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin, si α est une racine quelconque de $P_n(z)$ l'identité fondamentale montre que

$$B_n(\alpha) = \frac{1}{P'_n(\alpha)}; \tag{1}$$

le signe de $B_n(\alpha)$ est donc celui de $P'_n(\alpha)$. On en déduit que, de même que les $n-1$ racines de $P'_n(z)$ séparent les n racines de $P_n(z)$, les $n-1$ racines de $B_n(z)$ séparent les n racines de $P_n(z)$. On voit de la même manière que les $n-2$ racines de $A_n(z)$ séparent les $n-1$ racines de $P'_n(z)$, et séparent également les $n-1$ racines de $B_n(z)$.

---

[1] Nous supposons connues du lecteur les propriétés élémentaires des fonctions de Legendre, qui se trouvent dans tous les traités d'Analyse. *Voir*, notamment, WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 2e édition, Cambridge, 1916.

Formules de récurrence entre P *et* B. — Entre les polynomes B et les polynomes de Legendre existe la relation de récurrence

$$(2) \qquad P_{n-1}(z)\,B_n(z) - P_n(z)\,B_{n-1}(z) + \frac{z^2-1}{n} = 0.$$

Il nous suffit, pour la démontrer, de prouver que le premier membre, qui est un polynome en z de degré $2n-2$, s'annule pour $2n-1$ valeurs de z, à savoir les n racines α_i de $P_n(z)$, et les $n-1$ racines β_i de $P_{n-1}(z)$. En effet, pour $z=\alpha_i$, l'expression (2) devient, en vertu de (1), égale à

$$\frac{P_{n-1}(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i)} + \frac{\alpha_i^2-1}{n},$$

ce qui est nul, d'après l'une des formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées,

$$(z^2-1)\,P'_n(z) = n\,z\,P_n(z) - n\,P_{n-1}(z).$$

De même, pour une racine β_i, l'expression (2) devient égale à

$$-\frac{P_n(\beta_i)}{P'_{n-1}(\beta_i)} + \frac{\beta_i^2-1}{n},$$

ce qui est encore nul, en vertu de la relation

$$-(z^2-1)\,P'_{n-1}(z) = n\,z\,P_{n-1}(z) - n\,P_n(z).$$

La formule (2) est donc démontrée.

Par un raisonnement identique, on démontrera aussi la formule suivante

$$(3) \qquad P_{n+1}\,B_{n-1} - P_{n-1}\,B_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}\,z(z^2-1).$$

Valeurs particulières des polynomes B. — En faisant, dans la formule (2), $z=1$, et en nous rappelant que $P_n(1)=1$, nous obtenons le résultat

$$B_n(1) = B_{n-1}(1),$$

et, comme $B_1(1)=1$,

$$B_n(1) = 1.$$

De même, faisant $z=-1$, et sachant que $P_n(-1)=(-1)^n$, nous trouvons

$$B_n(-1) = (-1)^{n+1}.$$

Enfin, faisant $z = o$, nous pourrons écrire

$$B_{2m}(0) = 0.$$

$$B_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m+1)} = \frac{1}{(2m+1)P_{2m}(0)}.$$

Le polynome B *sous forme de déterminant.* — Si nous écrivons la formule (2),

$$P_{n-1}B_n - P_n B_{n-1} + \frac{z^2-1}{n} = 0.$$

et la suite des formules obtenues en diminuant chaque fois n d'une unité,

$$P_{n-2}B_{n-1} - P_{n-1}B_{n-2} + \frac{z^2-1}{n-1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_1 B_2 - P_2 B_1 + \frac{z^2-1}{2} = 0,$$

en y joignant

$$P_0 B_1 - 1 = 0,$$

nous obtenons n équations linéaires en $B_1, B_2, \ldots, B_n$, d'où nous pourrons tirer ces n quantités considérées comme inconnues. Nous aurons ainsi B_n sous forme du quotient de deux déterminants. Le déterminant dénominateur sera simplement le produit

$$P_1 P_2 \ldots P_{n-1};$$

et le déterminant numérateur sera très aisément simplifié, en ajoutant terme à terme deux lignes consécutives, et tenant compte de la formule de récurrence entre trois polynomes de Legendre consécutifs. Le produit $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ se trouve en facteur au numérateur, et nous obtiendrons l'expression suivante :

$$B_n(z) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 2z & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2 & 5z & 3 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 3 & 7z & 4 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 4 & 9z & 5 & \ldots \\ . & . & . & .. & . & \ldots \end{vmatrix},$$

le déterminant ayant $n-1$ lignes et colonnes.

Cette forme très simple permet aisément le calcul d'un polynome B_n d'ordre quelconque.

Formule de récurrence entre trois polynomes B *consécutifs.* — Reprenons les relations (2) et (3), joignons-y la suivante,

$$P_n B_{n+1} - P_{n+1} B_n + \frac{z^2 - 1}{n+1} = 0,$$

et éliminons P_{n+1}, P_n et P_{n-1} entre ces trois équations et la formule de récurrence bien connue

$$(n+1) P_{n+1} - (2n+1) z P_n + n P_{n-1} = 0.$$

de façon à obtenir une formule ne contenant plus que des polynomes B. Nous trouvons

$$(4) \qquad (n+1) B_{n+1} - (2n+1) z B_n + n B_{n-1} = 0,$$

c'est-à-dire la même formule de récurrence qu'entre trois polynomes P consécutifs.

On aurait pu également l'obtenir à partir de B_n mis sous forme de déterminant.

Expression de Q_n *au moyen du polynome* B_n. — La formule (4) va nous conduire à un résultat très important. Si nous considérons l'équation aux différences

$$(5) \qquad (n+1) u_{n+1} + n u_{n-1} = (2n+1) z u_n,$$

nous remarquerons que nous en connaissons deux solutions particulières, $P_n(z)$ et $B_n(z)$; la solution générale en sera donc

$$u_n = \varphi(z) P_n(z) + \psi(z) B_n(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions quelconques, indépendantes de n. Or nous savons que cette équation (5) admet également pour solution la fonction de Legendre de seconde espèce, $Q_n(z)$. Il existe donc deux fonctions φ est ψ telles que l'on ait

$$Q_n(z) = \varphi(z) P_n(z) + \psi(z) B_n(z).$$

Cherchons à obtenir directement cette expression [1]. On a, par

---

[1] Nous avons déjà publié ce résultat, ainsi que le raisonnement qui y conduit. (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 165, p. 759) et l'avons étendu en faisant connaître une méthode de réduction pour des fonctions de seconde espèce vérifiant une équation différentielle d'un type général (*Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. XXXVIII, p. 61). Nous en verrons plus loin deux exemples.

définition de la fonction de seconde espèce,

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)[P_n(t)]^2},$$

ce que nous écrirons

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{A_n P_n + B_n P'_n}{P_n^2} \frac{dt}{t^2-1}.$$

En intégrant par parties le terme contenant P'_n, nous trouvons

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} + \int_z^\infty \left[\frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2tB_n}{(t^2-1)P_n}\right] \frac{dt}{t^2-1}.$$

En dérivant l'identité fondamentale, nous avons la relation

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\frac{A'_n}{P'_n} - \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n}.$$

Par décomposition en éléments simples, les racines de P_n étant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et celles de P'_n étant $b_1; b_2, \ldots, b_{n-1}$, nous pourrons écrire

$$\frac{A'_n}{P'_n} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{A'_n(b_i)}{P''_n(b_i)} \frac{1}{z-b_i},$$

$$\frac{B_n P''_n}{P_n P'_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2 (z-a_i)} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{B_n(b_i)}{P_n(b_i)} \frac{1}{z-b_i},$$

ce qui nous donne, en observant que les sommes portant sur les b se détruisent en vertu de l'identité fondamentale dérivée.

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2} \frac{1}{z-a_i}.$$

Mais nous tirons de l'équation différentielle de Legendre la relation suivante :

$$\frac{P''_n(a_i)}{P_n(a_i)} = -\frac{2a_i}{a_i^2-1};$$

donc

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)} \frac{1}{z-a_i}.$$

D'autre part, la décomposition en éléments simples, jointe aux résultats que nous avons établis plus haut sur $B_n(1)$ et $B_n(-1)$,

nous permet d'écrire

$$\frac{2zB_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)(z-a_i)} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1},$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2zB_n}{(z^2-1)P_n} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1};$$

donc, en portant dans l'intégrale, et en intégrant,

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} + \frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{z^2-1},$$

c'est-à-dire

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{zP_n(z) - B_n(z)}{z^2-1}.$$

C'est bien l'expression que nous cherchions, et nous avons donc

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{z^2-1},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

De nombreux auteurs ont mis Q_n sous la forme

$$Q_n = \frac{1}{2}P_n\log\frac{z+1}{z-1} - f_{n-1},$$

où f_{n-1} est un polynome d'ordre $n-1$. Les expressions qu'ils en ont données sont en général compliquées, et contiennent les polynomes de Legendre d'ordre inférieur à n. On voit que nous avons simplement

$$f_{n-1} = \frac{zP_n - B_n}{z^2-1}.$$

Le polynome f_{n-1} est encore solution de l'équation aux différences (5), avec cette fois

$$\varphi(z) = \frac{z}{z^2-1}, \qquad \psi(z) = \frac{-1}{z^2-1}.$$

Enfin la formule (6), que l'on peut écrire

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(zB_n - P_n),$$

montre que le polynome

$$\Delta(z) = -\frac{1}{2}(A_n + B'_n)$$

est lui aussi solution de la même équation aux différences, avec

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \qquad \psi(z) = \frac{-z}{z^2 - 1}.$$

La formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P_n - B_n}{z^2 - 1}$$

est de toute première importance dans la théorie des polynomes qui nous occupent ; elle permettra en effet d'écrire de nombreuses propriétés du polynome B_n, à partir des propriétés connues de Q_n.

II.

Les polynomes A jouissent de propriétés analogues, et dont la démonstration est à peu de chose près identique à celle que nous avons donnée dans le cas des polynomes B.

Formule de récurrence entre A *et* P'. — C'est par une démonstration calquée sur celle de la formule de récurrence entre B et P, mais en considérant, au lieu des racines de P_n et P_{n-1}, celles de P'_n et P'_{n-1}, que l'on établira la relation

$$A_{n-1} P'_n - A_n P'_{n-1} = n, \tag{7}$$

ainsi que la suivante :

$$A_{n-1} P'_{n+1} - A_{n+1} P'_{n-1} = (2n+1) z. \tag{8}$$

Valeurs particulières des polynomes A. — Ces formules nous permettent d'écrire, en tenant compte des valeurs particulières des P',

$$A_n(1) = 1 - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$A_n(-1) = (-1)^n A_n(1)$$

et

$$A_{2m+1}(0) = 0.$$

$$A_{2m}(0) = (-1)^m \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots(2m-1)} = -2m B_{2m-1}(0).$$

Le polynome A_n *sous forme de déterminant.* — En opérant sur les formules (7) et (8) exactement comme nous l'avons fait sur les formules de récurrence entre les P et les B, nous obtiendrons sans difficulté l'expression

$$A_n = -\frac{2}{(n-1)!}\begin{vmatrix} 5z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 7z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 9z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6 & 11z & 5 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \end{vmatrix},$$

où le déterminant a $n-2$ lignes et colonnes.

Formule de récurrence entre trois polynomes A *consécutifs.* — On la tirera des mêmes formules, jointes à la suivante,

$$nP'_{n+1} - (2n+1)zP'_n + (n+1)P'_{n-1} = 0$$

et l'on obtiendra

$$nA_{n+1} - (2n+1)zA_n + (n+1)A_{n-1} = 0.$$

c'est-à-dire la même formule que pour P'. Or cette équation aux différences est satisfaite aussi par la fonction $Q'_n(z)$, qui dès lors pourra s'exprimer au moyen de P'_n et de A_n.

Expression de Q'_n *en fonction de* A_n. — Il suffit, pour obtenir cette expression, de dériver la formule donnant Q_n en fonction de P_n et de B_n. Nous trouvons ainsi

$$Q'_n = \frac{1}{2}P'_n \log\frac{z+1}{z-1} - \frac{z^3P'_n - z^2B'_n - 2P_n - zP'_n + B'_n + 2zB_n}{(z^2-1)^2}.$$

En tenant compte de la formule (6) établie plus haut,

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(zB_n - P_n),$$

nous trouvons l'expression très simple

$$Q'_n = \frac{1}{2}P'_n \log\frac{z+1}{z-1} - \frac{zP'_n + A_n}{z^2-1}.$$

Remarquons que ce terme

$$\frac{zP'_n + A_n}{z^2-1}$$

n'est pas un polynome, comme dans le cas de Q_n. On a en effet

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad A_n(1) = 1 - \frac{n(n+1)}{2};$$

le numérateur n'est donc pas nul pour $z = 1$.

III.

Formules de récurrence entre A *et* B. — Il existe, comme on le sait, un certain nombre de formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées, linéaires par rapport aux P et aux P′, et vérifiées aussi par les fonctions de seconde espèce Q_n et leurs dérivées. Considérons l'une d'entre elles, et écrivons-la

$$F(Q_i, Q_j, \ldots, Q'_i, Q'_j, \ldots) = 0.$$

Remplaçons dans cette formule les Q par leur expression en fonction de P et de B, les Q′ par leur expression en fonction de P′ et de A; tous les termes en P et P′ disparaîtront en vertu de

$$F(P_i, P_j, \ldots, P'_i, P'_j, \ldots) = 0$$

et il restera l'expression

$$F(B_i, B_j, \ldots, -A_i, -A_j, \ldots) = 0.$$

On obtiendra donc des formules de récurrence entre les polynomes A et B à partir d'une quelconque des formules de récurrence entre les fonctions de Legendre et leurs dérivées, en remplaçant P_i par B_i et P'_i par $-A_i$.

Nous écrirons donc, à partir des formules de récurrence classiques des polynomes de Legendre,

$$\begin{aligned}
zA_n - A_{n-1} + nB_n &= 0,\\
A_n - zA_{n-1} + nB_{n-1} &= 0,\\
(z^2-1)A_n + n(zB_n - B_{n-1}) &= 0,\\
(z^2-1)A_{n-1} + n(B_n - zB_{n-1}) &= 0,\\
(2n+1)B_n &= A_{n-1} - A_{n+1},
\end{aligned}$$

et, à partir d'une formule donnée par F. Neumann,

$$(2n+1)(z^2-1)A_n = n(n+1)(B_{n-1} - B_{n+1}).$$

Remarques. — Nous avons dit que A_0, A_1 et B_0 n'existaient pas; mais, pour que les formules que nous venons d'écrire soient valables quel que soit n, nous serons amenés à poser, par convention,

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = 0,$$
$$B_0 = z.$$

Toutes les formules indiquées ci-dessus (relations de récurrence entre P et B, entre P' et A, entre trois B ou trois A consécutifs, expressions de Q_n et de Q'_n) seront alors valables sans restrictions; et il en sera de même de celles que nous établirons par la suite.

Formules de récurrence contenant les dérivées. — On peut obtenir un certain nombre de formules de récurrence introduisant les dérivées des polynomes A ou B; mais elles contiendront en général les polynomes de Legendre. On y parviendra en dérivant la formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P_n - B_n}{z^2 - 1},$$

et en appliquant la relation de récurrence

$$(z^2 - 1) Q'_n = n z Q_n - n Q_{n-1}.$$

On trouvera ainsi

$$(z^2 - 1) B'_n = (n+1) B_{n+1} - (n-1) z B_n - 2 P_n$$

et

$$(z^2 - 1) B'_n = (n+2) z B_n - n B_{n-1} - 2 P_n$$

ou encore

$$(9) \qquad (z^2 - 1) A'_n + n(n+1) B_n = 2 P'_n.$$

A ce groupe se rattache la formule, que nous avons établie par ailleurs,

$$(z^2 - 1)(A_n + B'_n) = 2(z B_n - P_n),$$

d'où l'on pourra tirer la suivante, ne contenant plus P,

$$(z^2 - 1) B''_n + [n(n+1) - 2] B_n + 2 z A_n + 2(z^2 - 1) A'_n = 0,$$

mais ces dernières formules ne sont plus des formules de récurrence proprement dites.

Équation différentielle pour A_n. — Nous allons néanmoins en tirer un résultat intéressant : dans la formule (9), remplaçons B_n par sa valeur tirée de l'identité fondamentale : nous obtenons

$$(z^2-1)A'_n P'_n - n(n+1)A_n P_n = 2P'^2_n - n(n+1),$$

d'où, par dérivation, l'équation différentielle du second ordre, linéaire et avec second membre, à laquelle satisfait le polynome $A_n(z)$

$$(z^2-1)A''_n - n(n+1)A_n = 4P''_n.$$

On en remarquera la forme particulièrement simple ; et l'on pourra noter que l'on connaît une solution de l'équation sans second membre, à savoir la fonction primitive de $P_n(z)$.

Équation différentielle pour B_n. — Le même procédé pourrait nous conduire à une équation différentielle vérifiée par le polynome $B_n(z)$. Il est plus simple de la rechercher à partir de l'expression de Q_n en fonction de P_n et de B_n : on la dérivera deux fois, et l'on écrira que Q_n vérifie l'équation de Legendre. On sera ainsi amené à une équation différentielle pour $B_n(z)$, beaucoup moins simple d'ailleurs que celle de A_n :

$$\begin{aligned}(z^2-1)^2 B''_n - 2z(z^2-1)B'_n + [2(z^2+1) - n(n+1)(z^2-1)]B_n \\ = 4zP_n - 4(z^2-1)P'_n.\end{aligned}$$

Fonction génératrice de B_n. — C'est encore à partir de la même expression de Q_n que nous pourrons trouver une fonction génératrice pour B_n : il nous suffira de partir des fonctions génératrices bien connues de P_n et de Q_n : nous trouverons sans difficulté

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n B_n(z) = \frac{z^2-1}{\sqrt{1-2hz+h^2}} \log\left(e^{\frac{z}{z^2-1}} \frac{z-h+\sqrt{1-2hz+h^2}}{z+1}\right),$$

le logarithme étant népérien ; et nous n'oublierons pas la convention que nous avons faite sur B_0.

Formules de récurrence diverses. — De nombreuses autres formules pourraient être établies par des procédés analogues : signalons par exemple les suivantes, dont la démonstration serait

aisée :

$$A_{n-1}P_n + B_n P'_{n-1} = z,$$

$$A_n P_n - A_{n-1}P_{n-1} - z(P_n A_{n-1} + P_{n-1}A_n) + z^2 - 1 = 0,$$

$$B_n Q_{n-1} - B_{n-1}Q_n = \frac{1}{2n}\left[2z - (z^2-1)\log\frac{z+1}{z-1}\right], \qquad \ldots.$$

IV.

Développements en séries se rattachant aux suites de Sturm. — L'équation aux différences à laquelle satisfont les polynomes B_n montre que ces polynomes appartiennent à une suite de Sturm. On peut donc leur appliquer la formule fondamentale établie par Darboux dans son *Mémoire sur le théorème de Sturm*, et écrire le développement suivant :

$$\begin{aligned}(n+1)\frac{B_{n+1}(z)B_n(x) - B_{n+1}(x)B_n(z)}{z-x} &= (2n+1)B_n(z)B_n(x)\\ &+ (2n-1)B_{n-1}(z)B_{n-1}(x)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ 5B_2(z)B_2(x)\\ &+ 2B_1(z)B_1(x).\end{aligned}$$

La démonstration directe de cette formule, à partir des relations de récurrence, est d'ailleurs immédiate.

En faisant $x = z$, nous obtenons le développement

$$(n+1)(B'_{n+1}B_n - B_{n+1}B'_n) = (2n+1)B_n^2 + \ldots + 5B_2^2 + 2B_1^2.$$

De même, en remarquant que les polynomes P_n vérifient la même équation aux différences, on pourra écrire un autre groupe de développements :

$$\begin{aligned}(n+1)(B_n P'_{n+1} - B_{n+1}P'_n) &= B_0P_0 + 2B_1P_1 + \ldots + (2n+1)B_nP_n,\\ (n+1)(B'_{n+1}P_n - B_nP_{n+1}) &= -B_0P_0 + 3B_1P_1 + \ldots + (2n+1)B_nP_n.\end{aligned}$$

En considérant à présent que, pour la même raison, les polynomes A forment une suite de Sturm, nous aurons les développements suivants :

$$\frac{A_{n+1}(z)A_n(x) - A_n(z)A_{n+1}(x)}{(n+1)(z-x)} = \sum_{i=2}^{i=n}\frac{2i+1}{i(i+1)}A_i(z)A_i(x),$$

$$\frac{A'_{n+1}A_n - A'_nA_{n+1}}{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n}\frac{2i+1}{i(i+1)}A_i^2,$$

et de même

$$\frac{A_{n+1}(z)P'_n(x) - A_n(z)P'_{n+1}(x)}{(n+1)(z-x)} = \frac{1}{x-z} + \frac{5}{6}A_2(z)P'_2(x),$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$+ \frac{2n+1}{n(n+1)}A_n(z)P'_n(x);$$

d'où, en faisant $x = z$,

$$\frac{A_n P''_{n+1} - A_{n+1} P''_n}{n+1} = \frac{A'_{n+1} P'_n - A'_n P'_{n+1}}{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n} \frac{2i+1}{i(i+1)} A_i P'_i.$$

Autres développements. — Des développements en série analogues à ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions de Legendre s'obtiennent aisément à partir des diverses formules de récurrence : ainsi

$$-(A_{n+1} + A_n) = -1 + 3B_1 + 5B_2 + \ldots + (2n+1)B_n.$$
$$-A_n = (2n-1)B_{n-1} + (2n-5)B_{n-3} + (2n-9)B_{n-5} + \ldots,$$

le dernier terme étant ici $2B_1$ ou $5B_2$ suivant que n est pair ou impair.

Les mêmes formules de récurrence permettent d'écrire

$$1 - z^n A_n = B_1 + 2zB_2 + \ldots + nz^{n-1}B_n$$

et

$$\frac{z^{n-1}B_n - 1}{1 - z^2} = \frac{1}{2}A_2 + \frac{z}{3}A_3 + \ldots + \frac{z^{n-2}}{n}A_n.$$

Un développement introduisant les fonctions Q. — La formule suivante, due à Frobenius,

$$\frac{1}{2(y-x)} \log \frac{(x+1)(y-1)}{(x-1)(y+1)} = \sum_0^\infty (2n+1)Q_n(x)Q_n(y).$$

va nous permettre d'écrire un développement particulièrement remarquable.

Remplaçons dans le second membre $Q_n(x)$ par sa valeur en fonction de P_n et de B_n; puis tenons compte du développement fondamental

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty (2n+1)P_n(x)Q_n(y).$$

Nous arriverons alors au développement cherché :

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{x^2-1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}-x\right)=\sum_0^\infty(2n+1)B_n(x)Q_n(y).$$

Développement de B_n *en série de polynomes de Legendre.* — Plusieurs résultats ont été établis par Christoffel [1] sur le polynome que nous avons appelé $f_{n-1}(z)$, tel que

$$Q_n=\frac{1}{2}P_n\log\frac{z+1}{z-1}-f_{n-1}.$$

Nous allons utiliser ces travaux pour obtenir de nouvelles formules relatives au polynome B_n.

Tout d'abord, nous partirons du développement, indiqué par Christoffel, de f_{n-1} en série de polynomes de Legendre,

$$f_{n-1}=\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}+\ldots.$$

Or nous avons établi la formule

$$f_{n-1}=\frac{zP_n-B_n}{z^2-1},$$

d'où nous tirerons

$$B_n=zP_n-(z^2-1)\left[\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}+\ldots\right].$$

Les formules de récurrence entre les polynomes P nous permettent d'écrire

$$zP_n=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n}{2n+1}P_{n-1},$$

$$(2n-1)z^2P_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2n+1}P_{n+1}+\frac{n^2}{2n+1}P_{n-1}$$
$$+\frac{(n-1)^2}{2n-3}P_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2n-3}P_{n-3},$$

$$(2n-5)z^2P_{n-3}=\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-3)}P_{n-1}+\frac{(n-2)^2}{2n-3}P_{n-3}$$
$$+\frac{(n-3)^2}{2n-7}P_{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{2n-7}P_{n-5},$$

.....

---

[1] *Ueber die Gaussische Quadratur* (*Crelle*, t. 55, 1858). Les notations de Christoffel sont un peu différentes et le polynome f_{n-1} dont il s'occupe diffère du nôtre par un facteur constant.

Ceci nous donne, après simplifications, et en remarquant que les termes en P_{n+1} se détruisent, le développement du polynome $B_n(z)$ en série de polynomes de Legendre :

$$\begin{aligned} B_n = \frac{2(2n-1)}{3.n} P_{n-1} &- \frac{2(2n-5)(n^2-2n+2)}{1.3.5.n(n-1)(n-2)} P_{n-3} \\ &- \frac{2(2n-9)(n^2-4n+9)}{3.5.7.(n-1)(n-2)(n-3)} P_{n-5} \\ &- \frac{2(2n-13)(n^2-6n+20)}{5.7.9.(n-2)(n-3)(n-4)} P_{n-7} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ce que nous écrirons de la façon suivante :

$$B_n = -8 \sum_{m=0,1}^{m=n-1} \frac{(2m+1)(n^2+m^2+n+m-2)P_m}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)},$$

la parité de m étant différente de celle de n.

Développement du polynome Δ_n. — Le polynome que nous avons désigné par Δ_n, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}(A_n + B'_n),$$

admet un développement analogue, mais un peu plus simple. Il suffit, pour le trouver, d'écrire une formule connue,

$$\Delta_n = \frac{P_n - zB_n}{z^2-1} = -P_n + zf_{n-1},$$

et d'appliquer le développement de Christoffel. On trouve, après réductions,

$$\Delta_n = 4 \sum_{m=0,1}^{m=n-2} \frac{(2m+1)(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m+2)(n+m)} P_m,$$

m et n étant de même parité.

Développements introduisant des produits de fonctions de Legendre. — La seconde formule de Christoffel dont nous allons nous servir est la suivante :

$$P_m f_{n-1} - P_n f_{m-1} = \sum_{s=0}^{n-m-1} \frac{P_s P_{n-m-s-1}}{m+s+1},$$

qui comprend, comme cas particulier, la formule de Schläfli et Hermite,

$$f_{n-1} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s} P_{n-s} P_{s-1}.$$

Nous remarquerons que le premier membre de la formule de Christoffel n'est autre que

$$\frac{P_n B_m - P_m B_n}{z^2 - 1}.$$

Si nous faisons alors $m = 2$, nous arriverons à l'expression suivante pour le polynome B_n :

$$\frac{3}{2} B_n = \sum_{s=3}^{s=n} \left(\frac{P_{n-s}}{s} [P_{s-1} - P_{s-3}] \right) + P_{n-1} + \frac{z P_{n-2}}{2},$$

ce qu'au moyen de formules de récurrence on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{3}{2} B_n = (z^2 - 1) \sum_{s=3}^{s=n} \frac{2s - 3}{s(s-1)(s-2)} P_{n-s} P'_{s-2} + P_{n-1} + \frac{z P_{n-2}}{2}.$$

Faisons de même, dans la formule générale, $m = 1$; le premier membre devient

$$\frac{P_n - z B_n}{z^2 - 1},$$

c'est-à-dire le polynome Δ_n. Nous avons par conséquent le très simple développement suivant :

$$\Delta_n = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{P_s P_{n-s-2}}{s+2}.$$

V.

Intégrales définies diverses. — Un certain nombre d'intégrales définies où figurent les polynomes A et B ont des valeurs simples et qu'il est facile de calculer.

Si nous considérons l'identité fondamentale, et si nous l'intégrons entre -1 et $+1$, en remarquant que, puisque A_n est de

degré inférieur à P_n, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} A_n(z) P_n(z)\, dz$$

est nulle, nous obtenons le résultat

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P'_n(z)\, dz = 2.$$

De même, la formule de récurrence

$$P_{n-1} B_n - P_n B_{n-1} + \frac{z^2 - 1}{n} = 0$$

nous permet d'écrire, en intégrant,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = \frac{4}{3n}. \tag{10}$$

Si nous posons à présent

$$B_n(z) = b_{n-1} z^{n-1} + \ldots,$$
$$P_n(z) = p_n z^n + \ldots,$$

il est facile de calculer b_{n-1} en fonction de p_n : il suffit par exemple de se servir de l'équation différentielle satisfaite par B_n, ou du développement de B_n en série de polynomes de Legendre. Nous trouverons ainsi

$$b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n.$$

Écrivant alors

$$z B_n = a_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n,$$

nous aurons d'une part, en égalant les coefficients de z^n dans les deux membres,

$$b_{n-1} = a_n p_n,$$

d'où

$$a_n = \frac{2}{3},$$

et d'autre part

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z)\, dz,$$

d'où la formule

$$\int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z)\, dz = \frac{4}{3(2n+1)},$$

qui n'est d'ailleurs valable que pour $n > 1$; car pour $n = 1$, on n'a plus $b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n$.

Un procédé analogue nous conduira aux intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} z^2 A_n(z) P_n(z)\, dz = -\frac{4n}{3(2n-1)},$$

$$\int_{-1}^{+1} z\, A_n(z) P'_n(z)\, dz = 2 - n(n+1),$$

$$\int_{-1}^{+1} z^2 B'_n(z) P_n(z)\, dz = \frac{4(n-1)}{3(2n+1)}.$$

En appliquant les formules de récurrence, nous trouverons encore

$$\int_{-1}^{+1} z A_n(z) P_{n-1}(z)\, dz = -\frac{4}{3},$$

$$(11) \qquad \int_{-1}^{+1} A_{n+1}(z) P_{n-1}(z)\, dz = -\frac{4(2n+1)}{3n}.$$

Enfin, en appliquant aux intégrales (10) et (11) la formule d'Olinde Rodrigues pour le polynome P_n, nous obtenons les suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \frac{d^n B_{n+1}}{dz^n}\, dz = \frac{2^{n+2}}{3(n+1)} n!.$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \frac{d^n A_{n+2}}{dz^n}\, dz = \frac{(2n+3)2^{n+2}}{3(n+1)} n!.$$

Il nous est facile d'écrire une formule plus générale que toutes les précédentes. Si nous nous reportons au développement de B_n en série de polynomes P, multipliant les deux membres par P_m et intégrant, nous trouvons de suite, si m est de parité différente de n et inférieur ou égal à $n-1$,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z)\, dz$$
$$= -\frac{16(n^2+m^2+n+m-2)}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)}.$$

Si m est de même parité que n, ou supérieur à $n-1$, on a évidemment

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z)\, dz = 0.$$

Nous avons donc en particulier, si n est impair,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)\,dz = \frac{-16}{(n-2)n(n+1)(n+3)}.$$

Nous obtiendrons de même les résultats suivants :

1° Si n et p sont de parités différentes,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)B_p(z)\,dz = 0;$$

2° Si n et p sont de même parité,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z)B_p(z)\,dz$$
$$= 128\sum_m \frac{(2m+1)(m^2+n^2+m+n-2)(m^2+p^2+m+p-2)}{\left\{\begin{array}{l}(m+n+2)(m-n)(m-n-2)(m+n+3)(m+n-1)(m+n-1)\\ \times(m-p+2)(m-p)(m-p-2)(m-p+3)(m+p+1)(m+p-1)\end{array}\right\}}$$

la somme étant entendue de la façon suivante : m doit être de parité différente de n et p, et varier depuis 0 ou 1 jusqu'au plus petit des entiers $n-1$ ou $p-1$.

De même, nous reportant aux résultats établis sur le polynome Δ_n, nous aurons, avec $m < n$ et de même parité,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z)P_m(z)\,dz = 8\frac{(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m-2)(n+m)},$$

et, en particulier, avec n pair,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z)\,dz = \frac{8}{(n-1)(n+2)}.$$

Enfin, pour terminer, nous signalerons la formule suivante, que l'on déduira facilement de l'expression de Q_n sous forme d'intégrale définie, dite *de Neumann* :

$$\Delta_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{xP_n'(z) - zP_n(x)}{z-x}\,dx.$$

VI.

Polynomes de Gegenbauer. — Les principales propriétés des polynomes de Legendre ont été étendues à divers polynomes

satisfaisant à une équation différentielle analogue, mais plus générale. Telles sont les fonctions C_n^ν de Gegenbauer, dont l'équation différentielle est

$$(1-z^2)y''-(2\nu+1)zy'+n(n+2\nu)y=0.$$

Cherchons à étendre quelques-unes des propriétés des polynomes A_n et B_n aux polynomes A_n^ν et B_n^ν associés à C_n^ν par l'identité fondamentale

$$A_n^\nu C_n^\nu + B_n^\nu C_n'^\nu \equiv 1.$$

Rappelons tout d'abord quelques points de la théorie des fonctions C_n^ν, dont nous aurons à faire usage [1].

Le polynome $C_n^\nu(z)$ est défini par le développement

$$(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_0^\infty \alpha^n C_n^\nu(z),$$

et s'écrit, en série hypergéométrique limitée,

$$C_n^\nu(z)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\ n+2\nu;\ \nu+\frac{1}{2};\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Ces polynomes admettent diverses relations de récurrence, suivant que l'on fait varier les indices n ou ν, ou tous deux à la fois. Lorsque ν reste fixe, on a la formule de récurrence suivante entre trois polynomes consécutifs :

$$(12)\qquad (n+1)C_{n+1}^\nu+(n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu=2(n+\nu)zC_n^\nu$$

et des formules introduisant les dérivées, telles que celles-ci, dont nous nous servirons,

$$(13)\qquad nC_n^\nu=(n+2\nu-1)zC_{n-1}^\nu+(z^2-1)C_{n-1}'^\nu,$$

$$(14)\qquad nzC_n^\nu=(n+2\nu-1)C_{n-1}^\nu+(z^2-1)C_n'^\nu.$$

Polynomes associés aux polynomes de Gegenbauer. — Les principales propriétés des polynomes associés, A_n^ν et B_n^ν, se dédui-

---

[1] Les divers Mémoires de L. Gegenbauer sont résumés dans l'article de MM. Appell et Lambert, *Généralisations diverses des fonctions sphériques* (*édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 5, p. 237).

ront des relations de récurrence suivantes :

$$(n+2\nu-1)C_{n-1}^{\nu}B_n^{\nu} - nC_n^{\nu}B_{n-1}^{\nu} + z^2 - 1 = 0$$

et

$$\frac{A_n^{\nu}C_{n-1}^{\prime\nu}}{n} - \frac{A_{n-1}^{\nu}C_n^{\prime\nu}}{n+2\nu-1} + 1 = 0.$$

On les démontrera en procédant comme pour leurs analogues dans le cas des fonctions de Legendre. Ainsi, pour la première, on remarquera que le premier membre, polynome d'ordre $2n-2$, s'annule pour les $n-1$ racines α_i de C_{n-1}^{ν}, devenant alors égal à

$$-nC_n^{\nu}(\alpha_i) + (\alpha_i^2 - 1)C_{n-1}^{\prime\nu}(\alpha_i),$$

expression nulle d'après (13); et s'annule aussi, d'après (14), pour les n racines β_i de C_n^{ν}. La seconde formule admet une démonstration identique.

Nous déduirons de la première relation, comme nous l'avons fait pour le polynome B_n, et en tenant compte de la relation (12), l'expression de B_n^{ν} sous forme de déterminant à $n-1$ lignes :

$$B_n^{\nu} = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu)}\begin{vmatrix} (2\nu+1)z & 2\nu+1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & (2\nu+4)z & 2\nu+2 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & (2\nu+6)z & 2\nu+3 & \dots \\ . & . & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix},$$

et de la deuxième, en tenant compte de la relation

$$\frac{C_n^{\nu}}{n+2\nu-1} + \frac{C_{n-2}^{\prime\nu}}{n-1} = \frac{2(n+\nu-1)z}{(n+2\nu-1)(n-1)}C_{n-1}^{\prime\nu},$$

l'expression de A_n^{ν} sous forme de déterminant à $n-2$ lignes :

$$A_n^{\nu} = -\frac{n(2\nu+1)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu)}\begin{vmatrix} 2(\nu+2)z & 2\nu+3 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2(\nu+3)z & 2\nu+4 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 2(\nu+4)z & 2\nu+5 & \dots \\ . & . & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}.$$

De même, il nous sera très facile d'écrire la formule de récurrence liant trois polynomes B_n^{ν} à indices inférieurs consécutifs :

$$(15) \qquad (n+2\nu)B_{n+1}^{\nu} + nB_{n-1}^{\nu} = 2(n+\nu)zB_n^{\nu}.$$

Remarquons que, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas

des fonctions de Legendre, cette formule n'est pas la même que la formule (12) qui lie trois polynomes C_n^ν consécutifs. Elles ne seraient identiques que si l'on avait $\nu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque les fonctions de Gegenbauer se réduisent aux polynomes de Legendre.

Cependant on observera que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu(z)$$

vérifie la même équation aux différences (12) que C_n^ν.

Toutes les formules que nous avons indiquées deviennent, comme il fallait s'y attendre, identiques, pour $\nu = \frac{1}{2}$, aux formules correspondantes de la théorie des polynomes A_n et B_n.

Parmi les relations de récurrence existant entre les polynomes A_n^ν et B_n^ν, signalons les suivantes :

$$\frac{z A_n^\nu}{n} - \frac{A_{n-1}^\nu}{n+2\nu-1} + B_n^\nu = 0,$$

$$(z^2-1) A_{n-1}^\nu = (n+2\nu-1)(z B_{n-1}^\nu - B_n^\nu);$$

il serait aisé d'en écrire un grand nombre d'autres.

La relation (15) montrant que les polynomes B_n^ν forment une suite de Sturm, on pourra leur appliquer la formule de Darboux et obtenir par ce moyen divers développements en séries. On en déduirait aussi à partir des formules de récurrence.

Fonction de seconde espèce. — L'équation différentielle à laquelle satisfait C_n^ν admet une seconde solution, qui peut se mettre sous la forme

$$H_n^\nu(z) = K C_n^\nu(z) \int_\infty^z \frac{dt}{(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [C_n^\nu(t)]^2},$$

où K est une constante arbitraire. Si l'on prend K égal à $\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)}$, la fonction H_n^ν satisfera, non seulement à la même équation différentielle, mais à la même équation aux différences que C_n^ν. Or, comme nous savons que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu$$

satisfait aussi à cette équation, nous aurons, φ et ψ étant indépendants de n,

$$H_n^\nu(z) = \varphi(z)\, C_n^\nu(z) + \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)}\psi(z) B_n^\nu(z).$$

En effet, si nous appliquons à H_n^ν la méthode générale de réduction, que nous avons signalée ailleurs, et que nous avons employée plus haut pour obtenir la valeur de Q_n, nous serons conduits à l'expression

$$H_n^\nu(z) = (2\nu+1) H_0^{\nu+1}(z) C_n^\nu(z) - \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} \frac{B_n^\nu(z)}{(1-z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

généralisation de celle qui donne $Q_n(z)$.

Polynomes U_n. — Particulièrement intéressants, au point de vue des applications, sont les polynomes C_n^1, qui, désignés par le symbole U_n, ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert dans une question d'électrostatique [1], et forment la base de la théorie des polynomes *Électro-sphériques* introduits par ces auteurs. Les polynomes B associés aux polynomes U s'expriment fort simplement en fonction des U eux-mêmes. En faisant en effet $\nu = 1$ dans le déterminant qui donne B_n^ν, on trouve, après simplifications.

$$B_n^1 = \frac{1}{n+1} \begin{vmatrix} \frac{3}{2}z & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix},$$

avec toujours $n-1$ lignes. En développant, il vient

$$(n+1)B_n^1 = \frac{3}{2}z \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ . & . & .. & . & \dots \end{vmatrix}.$$

---

[1] *Annales de Physique*, 9e série, t. IX, 1918, p. 58.

le premier déterminant étant à $n-2$ lignes, et le second à $n-3$. Or, ainsi qu'il est facile de le vérifier, le déterminant à n lignes

$$\begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

n'est autre que le polynome U_n lui-même. On a donc la remarquable expression

$$(n+1)B_n^1 = \frac{3}{2} z U_{n-2} - U_{n-3},$$

ce qu'on peut encore écrire, eu égard aux propriétés des fonctions U,

$$(n+1) B_n^1 = U_{n-1} - \frac{z}{2} U_{n-2},$$

ou

$$(n+1)B_n^1 = \frac{z}{2} U_n - (z^2-1)U_{n-1}.$$

ou, encore plus simplement,

$$4(n+1)B_n^1 = 3U_{n-1} - U_{n-3}.$$

Polynomes C_n^0. — Aux fonctions C_n^ν se rattachent les polynomes que l'on désigne par la notation C_n^0, et que l'on définit comme le coefficient de $2\alpha^n$ dans le développement de

$$-\log(1-2\alpha z+\alpha^2).$$

Si l'on pose $z = \cos\theta$, on a alors

$$C_n^0(z) = \frac{\cos n\theta}{n}.$$

Les polynomes associés, A_n^0 et B_n^0, ont alors une expression remarquablement simple, et qu'il est facile de vérifier :

$$B_n^0(z) = \cos(n-1)\theta = (n-1)C_n^0(z)$$

et

$$A_n^0(z) = -n\,\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = -n\,C_n'^0(z).$$

VII.

Polynomes de Jacobi. — Les polynomes de la série hypergéométrique, introduits par Jacobi [1] et spécialement étudiés par Darboux [2], peuvent également être considérés comme une généralisation des polynomes de Legendre.

Rappelons brièvement leurs principales propriétés, avant d'étudier les polynomes qui leur sont associés par l'identité fondamentale.

Nous désignons par $X_n(z)$ le polynome de Jacobi d'ordre n, exprimé par le symbole

$$F(-n, \alpha+n; \gamma; z).$$

Il satisfait donc à l'équation hypergéométrique

$$(16) \qquad z(1-z)X''_n + [\gamma - (\alpha+1)z]X'_n + n(\alpha+n)X_n = 0.$$

Parmi les relations de récurrence qu'admettent ces polynomes et leurs dérivées, citons les trois suivantes :

$$(17) \qquad \frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1}(X_{n+1} - X_n) + (2n+\alpha)zX_n + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1}(X_{n-1} - X_n) = 0,$$

$$(18) \qquad nX_n - zX'_n = nX_{n-1} + \frac{n}{n+\alpha-1}zX'_{n-1},$$

$$(19) \qquad (n+\gamma)X_{n+1} - z(1-z)\frac{2n+\alpha+1}{n+\alpha}X'_n = [n+\gamma-(2n+\alpha+1)z]X_n.$$

La fonction de seconde espèce Q_n donne lieu à diverses remarques intéressantes. Darboux la définit par le développement

$$\frac{1}{z-y} = \sum_0^\infty \frac{X_n(z)Q_n(y)}{J_n},$$

---

(1) *Untersuchung über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Crelle*, t. 56, 1859).

(2) *Approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878).

où

$$J_n = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma^2(\gamma)\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\,\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\gamma+n)}.$$

La fonction Q_n ainsi définie vérifie l'équation aux différences (17), qui lie trois polynomes de Jacobi consécutifs; mais elle ne vérifie pas l'équation différentielle (16). L'équation différentielle pour Q_n est en effet

$$z(1-z)Q_n'' + [2-\gamma+(\alpha-3)z]Q_n' + (n+1)(n+\alpha-1)Q_n = 0.$$

Mais, si l'on pose

$$Q_n(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}U_n(z),$$

on aura

$$U_n(z) = (2n+\alpha)J_n X_n(z)\int_z^\infty \frac{dt}{t^\gamma(1-t)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2(t)}$$

et U_n vérifiera l'équation différentielle (16).

Polynomes associés aux polynomes de Jacobi. — Ceci posé, nous introduisons, comme toujours, les polynomes définis par l'identité fondamentale

$$\mathcal{A}_n X_n + \mathcal{B}_n X_n' \equiv 1.$$

Comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous établirons, sans aucune difficulté, au moyen des formules (18) et (19), la relation de récurrence suivante :

$$n(n+\alpha-\gamma)X_{n-1}\mathcal{B}_n - (n+\alpha-1)(n+\gamma-1)X_n\mathcal{B}_{n-1} + z(1-z)(2n+\alpha-1) = 0$$

et nous en déduirons la formule de récurrence liant trois polynomes $\mathcal{B}$ consécutifs :

$$\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{2n+\alpha+1}\mathcal{B}_{n+1} + \frac{(n+\alpha-1)(n+\gamma-1)}{2n+\alpha-1}\mathcal{B}_{n-1} - \left[\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1} + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1} - (2n+\alpha)z\right]\mathcal{B}_n = 0.$$

Cette formule, on le voit, n'est pas la même que la relation (17) entre trois polynomes X. Elle ne lui sera identique que dans le cas $\gamma = 1$. Si de plus on a $\alpha = 1$, on retombe, par un simple changement de variable, sur les polynomes de Legendre.

On sait que, si $\alpha = 2\gamma - 1$, les polynomes de Jacobi deviennent identiques aux polynomes de Gegenbauer. Ce qui précède nous montre donc que les fonctions B_n^γ et C_n^γ ne satisfont à la même équation aux différences que si $\gamma = 1$, donc $\alpha = 1$, c'est-à-dire dans le cas des fonctions de Legendre, fait que nous avions déjà remarqué directement.

Expression de la fonction de seconde espèce. — La fonction de seconde espèce Q_n ne s'exprimera donc par une expression de la forme

$$Q_n(z) = \varphi(z) X_n(z) + \psi(z) \mathfrak{B}_n(z)$$

que dans le cas $\gamma = 1$.

Mais, dans le cas général, si l'équation aux différences (17) n'est pas satisfaite par $\mathfrak{B}_n(z)$, on peut remarquer qu'elle est satisfaite par la fonction

$$(2n + \alpha) J_n \mathfrak{B}_n(z).$$

Donc on aura toujours

$$Q_n(z) = \varphi(z) X_n(z) + (2n + \alpha) J_n \psi(z) \mathfrak{B}_n(z).$$

D'ailleurs, pour $\gamma = 1$, on a $(2n + \alpha) J_n = 1$.

On trouvera cette expression en appliquant à U_n, seconde solution de l'équation différentielle (16), la méthode générale de réduction que nous avons indiquée. Dans le cas $\gamma = 1$, on aura

$$Q_n = X_n Q_0 + \frac{\alpha(\alpha+1)\mathfrak{B}_n + [\alpha - (\alpha+1)z] X_n}{\alpha(\alpha+1) z (1-z)}$$

et, dans le cas général,

$$(20) \quad Q_n = X_n Q_0 + \frac{(2n+\alpha) J_n \mathfrak{B}_n}{z(1-z)} + \frac{J_0 X_n [\alpha - \gamma + 1 - (\alpha+1) z]}{\gamma(\alpha+1) z (1-z)};$$

on a d'ailleurs

$$Q_0 = F\left(\gamma, 1; \alpha + 1; \frac{1}{z}\right).$$

La formule (20) donne une expression nouvelle de Q_n, que l'on pourra ajouter aux huit expressions différentes qu'en a données Darboux.

VIII.

Polynomes d'Hermite. — Nous allons terminer ce travail en faisant connaître quelques propriétés des polynomes A_n et B_n associés, par l'identité fondamentale, aux polynomes U_n d'Hermite, qui peuvent être considérés comme un cas limite des polynomes de Jacobi. On sait que ces polynomes [1], définis par

$$U_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

satisfont à l'équation différentielle

$$U''_n - 2x U'_n + 2n U_n = 0,$$

à l'équation aux différences :

$$U_{n+1} + 2x U_n + 2n U_{n-1} = 0, \tag{21}$$

et possèdent la propriété fondamentale suivante :

$$U'_n = -2n U_{n-1}. \tag{22}$$

Nous démontrerons, par la méthode ordinaire, en nous servant de (22) et de

$$U_{n+1} + 2x U_n - U'_n = 0,$$

qui est une conséquence de (21) et (22), la relation de récurrence

$$U_{n+1} B_n - 2(n+1) U_n B_{n+1} - 1 = 0. \tag{23}$$

Or, d'après (22), cette relation s'écrit

$$U_{n+1} B_n + B_{n+1} U'_{n+1} = 1,$$

ce qui montre, par comparaison avec l'identité fondamentale, que l'on a la remarquable propriété suivante :

$$A_{n+1} = B_n. \tag{24}$$

Diverses autres formules peuvent être écrites aisément : ainsi

---

[1] Ch. Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 294-308.

la relation de récurrence entre trois polynomes B consécutifs,

$$2(n+1)B_{n+1} + 2x B_n + B_{n-1} = 0,$$

et l'expression de B_n sous forme de déterminant à $n-1$ lignes :

$$B_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1} n!} \begin{vmatrix} 2x & 4 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 2x & 6 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 2x & 8 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix}.$$

L'identité fondamentale, écrite sous la forme

$$B_{n-1} U_n + B_n U'_n = 1$$

donne, par dérivation, et en tenant compte des relations de récurrence établies plus haut, la formule

$$U_n[B'_{n-1} - 2n B_n] - 2n U_{n-1}[B'_n - 2(n+1)B_{n+1}] = 0,$$

d'où l'on tirera, eu égard au degré des divers termes,

$$B'_n - 2(n+1)B_{n+1} = K_n U_n,$$
$$B'_{n-1} - 2n B_n = -2n K_n U_{n-1},$$

K_n étant une constante dépendant de n ; d'ailleurs

$$B'_{n-1} - 2n B_n = K_{n-1} U_{n-1},$$

d'où

$$K_{n-1} = 2n K_n$$

et, comme $K_1 = \frac{1}{2}$,

$$K_n = \frac{1}{2^n n!}.$$

Nous aurons donc enfin

$$B'_n - 2(n+1)B_{n+1} = \frac{U_n}{2^n n!}.$$

Ce résultat nous permettra d'écrire le développement de B en série de polynomes U. On aura en effet

$$2^{n+1}(n+1)!\, B_{n+1} - 2^n n!\, B'_n + U_n = 0,$$
$$2^n n!\, B'_n - 2^{n-1}(n-1)!\, B''_{n-1} + U'_{n-1} = 0,$$

et ainsi de suite, d'où en ajoutant

$$2^{n+1}(n+1)!\, B_{n+1} + U_n + U'_{n-1} + U''_{n-2} + \ldots = 0.$$

En tenant compte de (22), on exprimera les dérivées successives des U en fonction de ces U eux-mêmes, et l'on aura

$$-2^{n+1}(n+1)!\,B_{n+1} = U_n - 2(n-1)U_{n-2} + 4(n-2)(n-3)U_{n-4} + \ldots,$$

le coefficient du terme U_{n-2p} étant

$$(-1)^p 2^p (n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+1).$$

Il sera facile d'en déduire, en s'appuyant sur une propriété connue des polynomes d'Hermite, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} B_n U_m \, dx.$$

Polynomes de M. Appell. — La propriété la plus intéressante des polynomes associés aux polynomes d'Hermite, c'est-à-dire la relation

$$A_{n+1} = B_n, \tag{24}$$

peut se généraliser de la façon suivante. Considérons une suite de polynomes $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ satisfaisant à une équation différentielle du type

$$X''_n + [a(n)x + b(n)]X'_n + f(n)X_n = 0$$

et jouissant de la propriété suivante :

$$X'_n = \varphi(n)X_{n-1}, \tag{25}$$

ce qui les fait rentrer dans la classe de polynomes étudiée par M. Appell [1]. Il est facile de voir que ces polynomes satisfont à l'équation aux différences

$$f(n+1)X_{n+1} + [a(n+1)x + b(n+1)]X_n + \varphi(n+1)\varphi(n)X_{n-1} = 0. \tag{26}$$

L'identité fondamentale pourra s'écrire

$$A_n X_n + \varphi(n) B_n X_{n-1} = 1.$$

Écrivons de plus

$$A_{n+1} X_{n+1} + \varphi(n+1) B_{n+1} X_n \equiv 1.$$

---

[1] *Annales de l'École Normale*, t. IX, 1880, p. 119-144.

Si α est une racine de X_n, on aura

$$A_{n+1}(\alpha)X_{n+1}(\alpha) = \varphi(n)B_n(\alpha)X_{n-1}(\alpha).$$

Or, d'après (26),

$$f(n+1)X_{n+1}(\alpha) + \varphi(n)\varphi(n+1)X_{n-1}(\alpha) = 0;$$

donc

$$f(n+1)B_n(\alpha) + \varphi(n+1)A_{n+1}(\alpha) = 0,$$

ce qui, eu égard au degré de B_n et de A_{n+1}, nous montre que

$$f(n+1)B_n(x) + \varphi(n+1)A_{n+1}(x) \equiv 0,$$

relation qui généralise la formule (24) pour les polynomes de la classe de M. Appell.

SUR LES POLYNOMES D'APPROXIMATION;

Par M. P. Montel.

INTRODUCTION.

Les recherches de MM. Lebesgue, de la Vallée Poussin, S. Bernstein, D. Jackson ont mis en évidence le lien étroit qui rattache les propriétés différentielles d'une fonction d'une variable x à l'ordre de la méilleure approximation de cette fonction par un polynome de degré donné.

Soient $f(x)$ une fonction bornée de la variable x dans l'intervalle $(-1, +1)$ et $P_n(x)$ un polynome de degré inférieur ou égal à n; le maximum M_n de $|f(x) - P_n(x)|$ dans l'intervalle s'appelle l'*approximation* de $f(x)$ par le polynome. Lorsqu'on prend tous les polynomes possibles de degré inférieur ou égal à n, les nombres M_n ont un minimum $\mu(n)$ qu'on appelle la *meilleure approximation* de $f(x)$ par un polynome de degré non supérieur à n. Ce minimum $\mu(n)$ est atteint par un polynome unique $\Pi_n(x)$ qu'on appelle le *polynome d'approximation* ou *polynome de Tchebi-*

chef de degré n. On a alors, quel que soit x dans l'intervalle,

$$|f(x) - \Pi_n(x)| \leq \mu(n).$$

La suite des nombres $\mu(n)$ n'est jamais croissante et le théorème de Weierstrass exprime que cette suite a pour limite zéro pour une fonction $f(x)$ continue. Réciproquement, si $\mu(n)$ a pour limite zéro quand n croît indéfiniment, la fonction $f(x)$ est continue.

Le théorème de Weierstrass nous fournit ainsi une relation entre la continuité de la fonction et la décroissance de $\mu(n)$. Les recherches récentes que j'ai rappelées au début établissent un lien entre la rapidité de cette décroissance et l'existence pour $f(x)$ de dérivées de divers ordres. M. S. Bernstein a démontré surtout des conditions nécessaires : il a déduit, de la rapidité de la décroissance de $\mu(n)$, l'existence de dérivées pour $f(x)$. M. D. Jackson s'est surtout occupé de conditions suffisantes : de l'existence des dérivées de $f(x)$, il a déduit la rapidité de la décroissance de $\mu(n)$.

Les recherches de M. S. Bernstein reposent sur la possibilité de limiter les dérivées successives d'un polynome de degré n, dans un intervalle donné, en fonction du nombre n et de la borne supérieure du polynome dans le même intervalle. Ce résultat a été obtenu, par M. S. Bernstein, au moyen d'une analyse délicate des polynomes de Tchebichef qui s'approchent le plus de zéro dans un intervalle donné et satisfont à une autre condition : par exemple, le coefficient du terme de degré le plus élevé est donné. Dans le Chapitre I du présent travail, j'obtiens très simplement des résultats analogues à ceux de M. S. Bernstein par une méthode de représentation conforme applicable à des polynomes réels ou complexes. J'introduis la dérivée généralisée de Riemann-Liouville et je montre comment cette notion permet d'apporter plus de précision et de régularité dans l'étude des rapports entre l'existence pour la fonction $f(x)$ d'une dérivée d'ordre quelconque inférieur à α et le fait que l'ordre infinitésimal de $\mu(n)$ par rapport à $\frac{1}{n}$ est égal ou supérieur à α.

J'introduis, dans le Chapitre II, les différences successives de la fonction $f(x)$ pour des accroissements de x égaux à h. *Si le*

rapport $\frac{\Delta^{(r)} f(x)}{h^r}$ *a un module borné*, $\Delta^{(r)} f(x)$ désignant la différence d'ordre r de $f(x)$ pour des accroissements égaux à h donnés à x, on en déduit que $\mu(n)$ est d'un ordre infinitésimal supérieur ou égal à r, et que, par conséquent, *toutes les dérivées d'ordre inférieur à r existent pour* $f(x)$. Plus généralement, *si* $\frac{\Delta^{(r)} f(x)}{h^\alpha}$, *avec* $\alpha \leqq r$, *est borné, toutes les dérivées d'ordre inférieur à* α *existent*. On sait, par exemple, que si le rapport $\frac{\Delta f(x)}{h}$ a un module borné, la dérivée $f'(x)$ existe presque partout comme l'a établi M. Lebesgue; si $\frac{\Delta^2 f(x)}{h^{1+\alpha}}$ est borné, pour une valeur α comprise entre 0 et 1, la dérivée existe partout.

Dans le Chapitre III, je m'occupe de l'approximation des fonctions de plusieurs variables. Il y a lieu de faire intervenir ici les degrés du polynome par rapport à chacune des variables. S'il s'agit, par exemple, d'une fonction de deux variables $f(x, y)$, nous considérerons les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et de degré n en y et nous étudierons la décroissance de $\mu(m, n)$ lorsque m et n augmentent indéfiniment d'une manière indépendante [1].

Nous serons amenés à trouver pour $\mu(m, n)$ des expressions de la forme $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$; A, B, α, β étant des constantes positives, et nous montrerons que : *si* $\mu(m, n)$ *est de la forme* $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$, *la fonction correspondante* $f(x, y)$ *admet toutes les dérivées* $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}$ *pour lesquelles* $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$.

Il en sera, en particulier, ainsi lorsque les rapports $\frac{\Delta_h^{(r)} f(x, y)}{h^r}$ et $\frac{\Delta_k^{(s)} f(x, y)}{k^s}$ sont bornés, $\Delta_h^{(r)}$ désignant la différence d'ordre r de $f(x, y)$ pour des accroissements égaux à h donnés à x, et $\Delta_k^{(s)}$, la différence d'ordre s de $f(x, y)$, pour des accroissements égaux à k donnés à y. On peut d'ailleurs remplacer r et s par des nombres quelconques α et β respectivement inférieurs à r et à s.

---

[1] Le nombre $\mu(m, n)$ est défini avec les polynomes $P_{m,n}(x, y)$ comme $\mu(n)$ a été défini avec $P_n(x)$. Il faut remarquer que, lorsque m et n sont donnés, il n'existe pas nécessairement un seul polynome $H_{m,n}(x, y)$ fournissant l'approximation $\mu(m, n)$. *Cf.* L. Tonelli, *I polinomi d'approssimazione di Tchebychev* (*Annali di Matematica*, série 3, t. XV, 1908, p. 73).

Il résulte de là que : *si les rapports* $\frac{\Delta_h^r}{h^\alpha}$ $(\alpha \leqq r)$ *et* $\frac{\Delta_k^s}{k^\beta}$ $(\beta \leqq s)$ *ont des modules bornés, la fonction* $f(x, y)$ *admet toutes les dérivées partielles* $f^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}$ *pour lesquelles* $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$. Par exemple, si les rapports $\frac{\Delta_h^2}{h^\alpha}$ $(1 < \alpha \leqq 2)$ et $\frac{\Delta_k^2}{k^\beta}$ $(1 < \beta \leqq 2)$ sont bornés, les dérivées f'_x et f'_y existent et sont continues; si les rapports $\frac{\Delta_h^3}{h^3}$ et $\frac{\Delta_k^2}{k^\beta}$ $(1 < \beta \leqq 2)$ sont bornés, les dérivées f'_x, f'_y, f''_{x^2} existent et sont continues; il en est de même pour f''_{xy} si $\beta > \frac{3}{2}$. Si les rapports $\frac{\Delta_h^r}{h^r}$ et $\frac{\Delta_k^s}{k^s}$ sont bornés pour chaque valeur de r et de s, la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles de tous les ordres.

CHAPITRE I.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES.

1. Soit $P(x)$ un polynome entier de degré n, à coefficients réels ou imaginaires dont le module ne dépasse pas M pour tous les points x du segment $(-1, +1)$ de l'axe réel. Les dérivées de ce polynome ont, en chaque point du plan et en particulier sur ce segment, des modules dont les limites supérieures peuvent être exprimées en fonction de n et de M. C'est ce calcul que nous allons faire.

M. Dulac a montré le premier que si un polynome entier à coefficients réels ou complexes a un module inférieur à M en tous les points d'un segment rectiligne ou curviligne, les coefficients de ce polynome sont tous inférieurs à $M\lambda^n$, n étant le degré du polynome et λ un nombre qui dépend seulement de l'arc de courbe ou de la longueur du segment [1]. Il en résulte, en particulier, que le module d'un polynome de degré n, supposé inférieur à M sur le segment $(-1, +1)$, est inférieur à $M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$ dans un domaine quelconque du plan, $\frac{1}{\rho}$ étant ici un nombre qui ne dépend que de la forme du domaine. C'est ce théorème que M. Serge Bernstein a

---

[1] H. Dulac, *Sur les séries de Mac-Laurin à plusieurs variables* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908, p. 96).

démontré en 1912 pour les polynomes à coefficients réels dans le cas où le domaine est un segment de l'axe réel [1]; il a étendu ce résultat au cas où, le polynome étant toujours à coefficients réels, le domaine est une portion quelconque du plan [2]. L'énoncé précis du théorème de M. Serge Bernstein est le suivant: Si M est la plus grande valeur absolue d'un polynome de degré n à coefficients réels sur le segment $(-1, +1)$, le module de ce polynome en un point extérieur à ce segment est inférieur à $M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$, $\frac{1}{\rho}$ étant la demi-somme des axes de l'ellipse passant par ce point et ayant les points -1 et $+1$ pour foyers.

Les démonstrations de M. Serge Bernstein reposent sur une étude approfondie de certains polynomes de Tchebichef. Je me propose d'établir que la proposition précédente est applicable *aux polynomes à coefficients complexes* et qu'elle est une conséquence fort simple des principes de la représentation conforme [3].

Soit, en effet,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polynome de degré n à coefficients réels ou complexes et tel que

$$|P(x)| \leqq M$$

sur le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel.

La transformation conforme

$$2x = z + \frac{1}{z},$$

$$z = x - \sqrt{x^2 - 1},$$

où la détermination du radical est choisie de manière que les points $z = 0$ et $x = \infty$ soient homologues, fait correspondre aux

---

(1) *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné* (*Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. IV, 1912, p. 14).

(2) *Sur une propriété des polynomes* (*Mémoires de la Société mathématique de Charkow*, t. XIV). Dans ce cas, M. S. Bernstein démontre seulement que le module ne dépasse pas $2M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n$.

(3) J'ai communiqué cette démonstration à M. Dulac en juillet 1908. Depuis, cette méthode a été signalée et utilisée par M. Marcel Riesz (*Acta mathematica*, 1916, p. 341).

points du plan des x, où l'on a effectué la coupure $(-1, +1)$, les points intérieurs au cercle $C(|z|=1)$. Les points de la circonférence correspondent aux deux bords de la coupure; à tout cercle C_ρ concentrique au cercle C et de rayon $\rho < 1$, correspond une ellipse E_ρ ayant pour foyers -1 et $+1$ dont le grand axe est $2a = \frac{1}{\rho} + \rho$ et le petit axe $2b = \frac{1}{\rho} - \rho$: la demi-somme $a + b$ des axes est $\frac{1}{\rho}$.

Soit $R(z)$ la fraction rationnelle correspondant à $P(x)$

$$R(z) = P(x) = P\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right];$$

on a

$$R(z) = \frac{Q(z)}{z^n},$$

$Q(z)$ étant un polynome réciproque de degré $2n$. Sur la circonférence C, on a

$$|R(z)| = \left|\frac{Q(z)}{z^n}\right| = |Q(z)| = |P(x)| \leqq M;$$

donc, pour tout point du cercle $|z| \leqq 1$, on aura

$$|Q(z)| \leqq M.$$

Dans l'anneau compris entre les cercles C et C_ρ, on aura

$$|R(z)| \leqq \frac{|Q(z)|}{\rho^n} \leqq M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n,$$

donc

$$|P(x)| \leqq M\left(\frac{1}{\rho}\right)^n,$$

dans la région correspondante du plan des x, c'est-à-dire dans l'ellipse E_ρ de foyers $(-1, +1)$ dont $\frac{1}{\rho}$ est la demi-somme des axes.

Cette limite supérieure n'est d'ailleurs jamais atteinte, car si l'on avait en un point de E_ρ

$$|P(x)| = \frac{M}{\rho^n},$$

on aurait $|Q(z)| = M$ en un point du cercle C_ρ intérieur à C, $Q(z)$ serait alors une constante, ce qui est impossible, puisque

$Q(z)$ est un polynome réciproque. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si le polynome $P(x)$ *de degré* n *à coefficients réels ou complexes a un module inférieur à* M *sur le segment* $(-1, +1)$, *on a*

$$|P(x)| < \frac{M}{\rho^n}$$

en tous les points du domaine fermé limité extérieurement par une ellipse de foyers $(-1, +1)$ *dont* $\frac{1}{\rho}$ *est la demi-somme des axes.*

2. Nous allons déduire du théorème précédent des limites supérieures pour les coefficients du polynome $P(x)$.

Désignons par Γ le cercle de centre $x = 0$ et de rayon b, il est à l'intérieur de l'ellipse E_ρ et l'on a

$$a_p = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{P(x)\,dx}{x^{p+1}},$$

et, comme $|P(x)| < \frac{M}{\rho^n}$ sur Γ, on peut écrire

$$|a_p| < \frac{M}{\rho^n b^p},$$

où

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right),$$

donc

$$(1) \qquad |a_p| < M\frac{2^p}{\rho^{n-p}(1-\rho^2)^p}.$$

Nous pouvons donner à ρ une valeur arbitraire inférieure à l'unité ; prenons par exemple

$$1 - \rho^2 = \rho,$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}+1},$$

il viendra

$$(2) \qquad |a_p| < (\sqrt{5}+1)^n M < M\left(\frac{10}{3}\right)^n.$$

On peut obtenir une meilleure approximation pour $|a_p|$ en

déterminant ρ de manière que le second membre de l'inégalité (1) ait la plus petite valeur possible : en annulant la dérivée logarithmique du dénominateur, on obtient

$$\frac{n-p}{\rho} = \frac{2p\rho}{1-\rho^2},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{n-p}{n+p}}$$

et

$$(3) \qquad |a_p| < \frac{M}{p^p} \frac{(n+p)^{\frac{n+p}{2}}}{(n-p)^{\frac{n-p}{2}}},$$

formule encore valable pour $p = 0$ et $p = n$, à condition de remplacer, dans le premier cas, p^p par l'unité et, dans le second cas, $(n-p)^{n-p}$ par l'unité.

Il est facile d'obtenir le maximum du second membre de l'inégalité lorsque p varie d'une manière continue de 0 à n. On peut espérer ainsi arriver à une limite supérieure applicable au module de tous les coefficients et meilleure que celle fournie par l'inégalité (2).

Un calcul facile, que j'omets, montre que le second membre de (3) est maximum pour

$$p = \frac{n}{\sqrt{2}},$$

et que la valeur de ce second membre est alors

$$M(\sqrt{2}+1)^n < M\left(\frac{5}{2}\right)^n;$$

on peut donc écrire

$$(4) \qquad |a_p| < M\left(\frac{5}{2}\right)^n,$$

inégalité à peine différente de l'inégalité (2).

3. Arrêtons-nous un instant sur l'inégalité relative à a_1; on a, en faisant $p = 1$ dans la formule (3),

$$|a_1| < M \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}};$$

or

$$\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} = n\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}} < ne$$

et

$$|a_1| < nMe < 3Mn.$$

Si l'on remplace le segment $(-1, +1)$ par le segment $(-h, +h)$, la transformation $x = hx'$ donne

$$P(x) = a_0 + a_1 hx' + \ldots$$

et

$$|a_1| < \frac{eMn}{h};$$

donc, si le polynome $P(x)$ a un module inférieur à M sur un segment de longueur $2h$ porté par l'axe réel, la dérivée $P'(x)$ a un module inférieur à $\frac{eMn}{h}$, au milieu de ce segment.

Considérons, en particulier, les points intérieurs au segment $(-x, +x)$ avec $|x| < 1$, chacun de ces points est le milieu d'un segment $(-h, +h)$ contenu dans $(-1, +1)$ si l'on prend $h = 1 - |x|$; si donc $|P(x)| < M$ sur le segment $(-1, +1)$, on aura

$$|P'(x)| < \frac{eMn}{1-|x|}$$

pour tout point x intérieur à ce segment.

On peut obtenir une inégalité plus précise en introduisant de nouveau le cercle C; chaque point de ce cercle C est le centre d'un cercle γ de rayon $1-\rho$, contenu dans l'anneau limité par les cercles C_ρ et $C_{\frac{1}{\rho}}$, concentriques à C, ayant respectivement pour rayons ρ et $\frac{1}{\rho}$. On a, en un point z de ce cercle γ,

$$R'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{R(z')\,dz'}{(z-z')^2}$$

et par suite, comme $R(z') = R\left(\frac{1}{z'}\right)$ a un module inférieur à $\frac{M}{\rho^n}$ dans l'anneau $C_\rho\, C_{\frac{1}{\rho}}$,

$$|R'(z)| < \frac{M}{\rho^n(1-\rho)};$$

le minimum du second membre a lieu pour $\rho = \frac{n}{n+1}$ et l'on a

$$|R'(z)| < M\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = Mn\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4Mn,$$

car le nombre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ décroît lorsque n croît et sa valeur pour $n=1$ est 4.

De l'égalité

$$P(x) = R(z),$$

on déduit

$$P'(x) = R'(z)\frac{dz}{dx};$$

on a facilement, en tenant compte de

$$z = x - \sqrt{x^2-1},$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

et, sur le cercle C,

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$|P'(x)| = \frac{|R'(z)|}{\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$(1) \qquad |P'(x)| < \frac{4Mn}{\sqrt{1-x^2}} \quad (^1)$$

Si l'on cherche le maximum du module de $P'(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ tout entier, on obtiendra une limite supérieure proportionnelle à n^2. On a en effet

$$P'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{E_\rho}\frac{P(x')\,dx'}{(x'-x)^2},$$

d'où

$$|P'(x)| < \frac{M}{\rho^n(a-1)},$$

car $a-1$ est le minimum de la distance d'un point du segment $(-1, +1)$ à l'ellipse E_ρ.

Or

$$a-1 = \frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)-1 = \frac{(1-\rho)^2}{2\rho},$$

---

(1) M. S. Bernstein a montré que l'on peut remplacer 4 par 1, pour un polynome à coefficients réels (*loc. cit.*, p. 11).

donc

$$|P'(x)| < \frac{2M}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2};$$

lorsque ρ varie, entre 0 et 1, le minimum du second membre a lieu pour

$$\rho = \frac{n-1}{n+1};$$

la valeur de ce second membre est alors

$$\frac{1}{2} M \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}};$$

or, nous avons vu au début de ce paragraphe que le dernier facteur est inférieur à $n^2 e^2$, donc la valeur minimum est inférieure à

$$\frac{e^2}{2} M n^2 < 4 M n^2;$$

on a donc sur le segment $(-1, +1)$

$$|P'(x)| < 4 M n^2 \quad (^1).$$

4. On déduit aisément de ce qui précède des limites supérieures pour le module maximum du rapport

$$\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

dans lequel x' et x'' appartiennent au segment $(-1, +1)$. On peut écrire en effet

$$\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha} = \left[\frac{P(x') - P(x'')}{x' - x''}\right]^\alpha [P(x') - P(x'')]^{1-\alpha}.$$

Le second facteur est, en module, inférieur à $(2M)^{1-\alpha}$. Occupons-nous du premier : si x' et x'' appartiennent au segment $(-1, +1)$ tout entier, la dérivée $P'(x)$ est inférieure en module à $4Mn^2$; si $P(x)$ est à coefficients réels, le maximum de $\left|\frac{P(x') - P(x'')}{x' - x''}\right|$

(1) M. S. Bernstein a montré que l'on peut remplacer 4 par 1, dans le cas des polynomes à coefficients réels (*loc. cit.*, p. 13).

est le même que celui de $|P'(x)|$; on a donc

$$\left|\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha}\right| < (4Mn^2)^\alpha \times (2M)^{1-\alpha} = 2^{1+\alpha} M n^{2\alpha}.$$

Si $P(x)$ est à coefficients complexes, il suffit de le décomposer en sa partie réelle et sa partie imaginaire; comme, pour chacune d'elles, le rapport admet comme limite supérieure la valeur précédente, il suffira de multiplier par $\sqrt{2}$ cette valeur pour obtenir une limite supérieure du rapport $\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha}$. On aura donc, dans ce cas, le coefficient $2^{\frac{3}{2}+\alpha}$.

Si x' et x'' restent à l'intérieur d'un segment $(-x, +x)$ intérieur au segment $(-1, +1)$, on aura

$$|P'(x)| < \frac{eMn}{1 - |x|},$$

d'où

$$\left|\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha}\right| < \frac{kMn^\alpha}{[1 - |x|]^\alpha},$$

k étant égal à e ou $e\sqrt{2}$ suivant que $P(x)$ a ses coefficients réels ou complexes; on peut prendre aussi

$$|P'(x)| < \frac{4Mn}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d'où

$$\left|\frac{P(x') - P(x'')}{(x' - x'')^\alpha}\right| < \frac{k'Mn^\alpha}{(1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

avec $k' = 2^{1+\alpha}$ ou $2^{\frac{3}{2}+\alpha}$.

5. Nous obtiendrons des résultats plus complets en introduisant la dérivée généralisée de Riemann-Liouville. Nous poserons

$$D_x^0 f(x) = f(x),$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_k^x (x - z)^{-\alpha-1} f(z)\, dz \qquad (\alpha < 0),$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{d^p}{dx^p} D_x^{\alpha-p} f(x) \qquad (0 \leq p - 1 < \alpha < p),$$

formules dans lesquelles $f(x)$ est une fonction uniforme quelconque, Γ la fonction eulérienne de seconde espèce et k une

constante que nous prendrons dans la suite fréquemment égale à -1, parce que nous étudierons des fonctions de x définies dans l'intervalle $(-1, +1)$. Nous prendrons toujours, dans ce cas, pour $(x-z)^{-\alpha-1}$, la détermination réelle pour $x = -1$.

On peut d'ailleurs faire varier k : si la dérivée existe pour une valeur particulière k_0, elle existe pour toute valeur de k.

L'égalité

$$\int_{k+a}^{x+a} (x+a-z)^{-\alpha-1} f(z-a)\, dz = \int_k^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\, dz$$

montre que nous pouvons faire subir à la courbe $y = f(x)$ une translation parallèle à Ox et mesurée par a sans changer la valeur de la dérivée.

J'établirai la proposition suivante :

Si une fonction $f(x)$ admet une dérivée bornée d'ordre α, elle admet aussi une dérivée d'ordre α' quelconque inférieur à α.

Nous prendrons $k = 0$ et nous supposerons d'abord

$$0 < \alpha' < \alpha < 1.$$

On a

$$D_x^{\alpha} f(x) = F'(x)$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-z)^{-\alpha} f(z)\, dz;$$

supposons $F'(x)$ bornée dans l'intervalle considéré, on peut alors former

$$D_x^{\alpha'-\alpha} F'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F'(z')\, dz'.$$

Cette expression est la dérivée de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x dx \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F'(z')\, dz'$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x F'(z')\, dz' \int_{z'}^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\, dx$$

ou

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha')\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'} F'(z')\, dz'$$

et, en intégrant par parties et remarquant que $F(0) = 0$, cette intégrale devient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha')} \int_0^x (x - z')^{\alpha - \alpha' - 1} F(z')\, dz' = I.$$

I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha')\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x (x - z')^{\alpha - \alpha' - 1}\, dz' \int_0^{z'} (z' - z)^{-\alpha} f(z)\, dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha')\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x f(z)\, dz \int_z^x (x - z')^{\alpha - \alpha' - 1} (z' - z)^{-\alpha}\, dz'; \end{aligned}$$

la dernière intégrale devient, en posant

$$z' - z = t(x - z),$$

$$(x - z)^{-\alpha'} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha - \alpha' - 1} t^{-\alpha}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha - \alpha')\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha')} (x - z)^{-\alpha'}$$

et

$$I = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha')} \int_0^x (x - z)^{-\alpha'} f(z)\, dz.$$

La fonction I admet donc une dérivée et l'on peut écrire

$$I' = D_x^{\alpha'} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha')} \int_0^x (x - z)^{\alpha - \alpha' - 1} F'(z)\, dz.$$

Si l'on examine le cas particulier de $\alpha' = 0$, on retrouve la solution du problème d'inversion classique d'Abel.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où

$$p - 1 < \alpha \leqq p.$$

Il nous suffira de supposer $\alpha' < \alpha$ placé lui aussi entre $p - 1$ et p, car, de proche en proche, on démontrera aussi l'existence d'une dérivée d'ordre quelconque inférieur à α. Supposons donc

$$p - 1 \leqq \alpha' < \alpha < p$$

en laissant de côté le cas de $\alpha = p$.

Par définition, on a

$$D_x^{\alpha} f(x) = F^{(p)}(x)$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p - \alpha)} \int_0^x (x - z)^{p - \alpha - 1} f(z)\, dz.$$

Formons encore l'expression

$$D_x^{\alpha'-\alpha} F^{(p)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p)}(z')\, dz' = \Phi(x);$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^x \Phi(x)\, dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x dx \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p)}(z')\, dz' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x F^{(p)}(z')\, dz' \int_{z'}^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\, dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-\alpha')\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'} F^{(p)}(z')\, dz',\end{aligned}$$

et, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^x \Phi(x)\, dx = &- \frac{x^{\alpha-\alpha'} F^{(p-1)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p-1)}(z')\, dz',\end{aligned}$$

on aura de même

$$\begin{aligned}\int_0^x \int_0^x \Phi(x)\, dx\, dx = &- \frac{x^{\alpha-\alpha'+1} F^{(p-1)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+2)} \\ &- \frac{x^{\alpha-\alpha'} F^{(p-2)}(0)}{\Gamma(\alpha-\alpha'+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F^{(p-2)}(z')\, dz'\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{p} \Phi(x)\, dx \ldots dx = &\; x^{\alpha-\alpha'} Q_{p-1}(x) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} F(z')\, dz',\end{aligned}$$

$Q_{p-1}(x)$ étant un polynome en x de degré $p-1$. Désignons par I cette dernière intégrale, on aura

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1}\, dz' \int_0^{z'} (z'-z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha')\Gamma(p-\alpha)} \int_0^x f(z)\, dz \int_z^x (x-z')^{\alpha-\alpha'-1} (z'-z)^{p-\alpha-1}\, dz';\end{aligned}$$

faisons le changement de variable

$$z' - z = t(x - z)$$

dans la dernière intégrale : elle devient

$$(x - z)^{p-\alpha'-1} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha-\alpha'-1} t^{p-\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha - \alpha')\Gamma(p - \alpha)}{\Gamma(p - \alpha')} (x - z)^{p-\alpha-1},$$

et, par suite,

$$I = \frac{1}{\Gamma(p - \alpha')} \int_0^x (x - z)^{p-\alpha'-1} f(z)\, dz.$$

On déduit de là

$$\frac{d^p I}{dx^p} = \Phi(x) - \frac{d^p}{dx^p}[x^{\alpha-\alpha'} Q_{p-1}(x)] = D_x^\alpha f(x).$$

Le cas de $\alpha = p$ se traite de la même manière en remplaçant dans les calculs précédents $F(x)$ par $f(x)$. En posant

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(p - \alpha')} \int_0^x (x - z)^{p-\alpha'-1} f^{(p)}(z)\, dz$$

et

$$I = \frac{1}{\Gamma(p - \alpha')} \int_0^x (x - z)^{p-\alpha'-1} f(z)\, dz$$

avec $p - 1 \leq \alpha' < p$, on obtient

$$\frac{d^p I}{dx^p} = \Phi(x) + \frac{d^p}{dx^p}[x^{p-\alpha'} Q_{p-1}(x)] = D_x^\alpha f(x).$$

La proposition est ainsi démontrée dans tous les cas.

6. Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction holomorphe et uniforme dans un domaine contenant le segment $(-1, +1)$; nous désignerons toujours par x l'abscisse d'un point de ce segment. Je me propose de représenter la dérivée $D_x^\alpha f(x)$ par une intégrale de contour.

On a, si $p - 1 \leq \alpha < p$,

$$D_x^\alpha f(x) = F^{(p)}(x)$$

avec

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p - \alpha)} \int_{-1}^x (x - z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz.$$

Partons de -1 avec la détermination réelle de $(x-z)^{-\alpha}$ et décrivons dans le sens inverse le lacet $(-1, x)$. L'intégrale étendue au petit cercle est infiniment petite d'ordre $p-\alpha$; on a donc, en traçant un contour quelconque C passant par -1 et contenant le segment $(-1, +1)$,

$$\int_C + \int_{-1}^{x} + \int_{x}^{-1} = 0,$$

le contour C étant parcouru dans le sens direct en partant du point -1; lorsqu'on revient au point -1 l'expression $(x-z)^{p-\alpha-1}$ est multipliée par $e^{2i\pi(p-\alpha-1)}$ et la seconde intégrale est égale à $e^{2i\pi(p-\alpha-1)}F(x)$; pour obtenir la dernière, il faut tourner de 2π autour de x et dans le sens inverse, on revient donc à la détermination initiale de $(x-z)^{p-\alpha-1}$ et la troisième intégrale est égale à $-F(x)$. Donc

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)\left[1-e^{2i\pi(p-\alpha-1)}\right]}\int_C (x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\,dz.$$

Or

$$1-e^{2i\pi(p-\alpha-1)} = e^{-i\pi(\alpha+1-p)}\,2i\sin(\alpha+1-p)\pi,$$

et comme

$$\Gamma(p-\alpha)\Gamma(1+\alpha-p) = \frac{\pi}{\sin(1+\alpha-p)\pi},$$

il vient

$$F(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{2i\pi}\int_C e^{-i\pi(p-\alpha-1)}(x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\,dz$$

ou

$$F(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-p)}{2i\pi}\int_C (z-x)^{p-\alpha-1} f(z)\,dz.$$

On déduit de là

$$F'(x) = \frac{\Gamma(2+\alpha-p)}{2i\pi}\int_C (z-x)^{p-\alpha-2} f(z)\,dz$$

et

$$F^{(p)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_C (z-x)^{-\alpha-1} f(z)\,dz$$

ou encore

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

formule qui généralise l'expression bien connue pour les dérivées d'ordre entier.

7. Nous allons appliquer les résultats précédents à l'étude de la dérivée d'ordre α d'un polynome entier $P(x)$ de degré n dont le module sur le segment $(-1, +1)$ reste inférieur à M. On a, pour un point x de ce segment,

$$D_x^\alpha P(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi} \int_C \frac{P(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

C désignant un contour simple quelconque passant par le point -1 et entourant le segment $(-1, +1)$. Nous nous limiterons aux valeurs de x comprises dans le segment $(-x_0, +x_0)$ intérieur au précédent. Traçons une ellipse E quelconque de foyers $(-1, -1)$: nous supposerons l'ellipse assez aplatie pour que l'abscisse du centre de courbure au sommet $x = a$ de l'axe focal soit supérieure à x_0.

Soit P un point d'abscisse x sur le segment $(-1, +1)$, calculons la distance de ce point à l'ellipse E; c'est la longueur PM de la normale menée de P distincte du grand axe; appelons P′ le point de rencontre avec Ox de la tangente à l'ellipse E au pied M de cette normale et Q la projection de M sur Ox : on a

$$OP' = \frac{1}{|x|} \qquad OQ = \frac{a^2}{OP'} = a^2|x|,$$

d'où

$$PP' = \frac{1}{|x|} - |x| = \frac{1-x^2}{|x|},$$
$$PQ = a^2|x| - |x| = b^2|x|,$$
$$\overline{PM}^2 = PQ.PP' = b^2(1-x^2).$$

La distance r de P à l'ellipse est donc $b\sqrt{1-x^2}$ et l'on a

$$b\sqrt{1-x_0^2} \leqq r \leqq b.$$

Si l'ellipse E a une excentricité telle que, pour certaines valeurs de x, le point M soit imaginaire, nous conserverons la même valeur de r, ce sera le rayon d'un cercle de centre P, intérieur à l'ellipse et ayant avec elle un double contact imaginaire.

Traçons le cercle γ de centre P et de rayon r qui coupe en A le segment $(-1, x)$ si b est assez petit, l'intégrale prise le long de C peut être remplacée par

$$e^{-2i\pi\alpha}\int_{-1}^{A} + e^{2i\pi\alpha}\int_{\gamma} + \int_{A}^{-1}$$

et son module est inférieur à

$$2\left|\int_{-1}^{x}\right| + \left|\int_{\gamma}\right|.$$

Nous allons évaluer une limite supérieure de chacune de ces intégrales. Pour la seconde

$$I = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{P(z)\,dz}{(z-x)^{\alpha+1}},$$

on a

$$|I| < \frac{\Gamma(\alpha+1)\,M}{\rho^n r^\alpha},$$

puisque à l'intérieur de l'ellipse E, le module de $P(z)$ est inférieur à $\frac{M}{\rho^n}$ et comme

$$r = b\sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1-\rho^2}{2\rho},$$

$$|I| < \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\,M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{1}{\rho^{n-\alpha}(1-\rho^2)^\alpha}.$$

Déterminons ρ, entre 0 et 1, de manière que le second membre soit minimum, il suffit de prendre

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{n-\alpha}{n+\alpha}} \qquad (n > \alpha),$$

d'où

$$|I| < \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{\alpha^\alpha(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{(n+\alpha)^{\frac{n+\alpha}{2}}}{(n-\alpha)^{\frac{n-\alpha}{2}}};$$

or, en posant $n = n'\alpha$,

$$\frac{1}{\alpha^\alpha}\cdot\frac{(n+\alpha)^{\frac{n+\alpha}{2}}}{(n-\alpha)^{\frac{n-\alpha}{2}}} = \left[\frac{(n'+1)^{\frac{n'+1}{2}}}{(n'-1)^{\frac{n'-1}{2}}}\right]^\alpha < e^\alpha n^\alpha,$$

car nous avons vu, au paragraphe 3, que le nombre entre crochets est inférieur à en.

Il résulte de là que

$$(1) \qquad |I| < \frac{k' n^\alpha M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

k' désignant la constante $\Gamma(\alpha+1)e^\alpha$.

Passons à la première intégrale

$$\int_{-1}^{A} = I'' = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_{-1}^{x-r}(x-z)^{-\alpha-1}P(z)\,dz;$$

on a

$$|I''| \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)M}{2\pi}\int_{-1}^{x-r}(x-z)^{-\alpha-1}dz,$$

$$= \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi}\left[\frac{1}{r^{\alpha}} - \frac{1}{(x+1)^{\alpha}}\right] < \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi r^{\alpha}},$$

et comme $r = b\sqrt{1-x^2}$,

$$|I''| < \frac{M\Gamma(\alpha)}{2\pi(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{b^{\alpha}};$$

or nous avons

$$b = \frac{1-z_0^2}{2z_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{n^2-\alpha^2}},$$

$$\frac{1}{b} < \frac{n}{\alpha},$$

d'où

$$2|I''| < \frac{M\Gamma(\alpha)n^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}\times\pi(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{k''n^{\alpha}M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

et, si $k_1 = k' + k''$,

$$|D_x^{\alpha}P(x)| < \frac{k_1 n^{\alpha}M}{(1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Le calcul que nous venons de faire est encore applicable au cas où α est un entier; dans ce dernier cas, les intégrales prises le long du segment $(-1, A)$ ont une somme nulle et il suffit d'évaluer une limite supérieure du module de l'intégrale prise le long du cercle γ.

Pour un point quelconque intérieur au segment $(-x_0, +x_0)$, nous aurons, dans tous les cas,

$$(2) \qquad |D_x^{\alpha}P(x)| < \frac{k_1}{(1-x_0^2)^{\frac{\alpha}{2}}}n^{\alpha}M = kn^{\alpha}M.$$

La validité du raisonnement précédent suppose le point A à l'intérieur du segment $(-1, x)$; il faut pour cela que

$$r < 1 + x$$

ou

$$b \leqq \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(-x_0, +x_0)$, x_0 étant positif, il suffit que

$$b \leqq \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}},$$

et, en remplaçant b par sa valeur $\frac{\alpha}{\sqrt{n^2-\alpha^2}}$, il vient

$$n \geqq \alpha\sqrt{\frac{2}{1-x_0}}.$$

L'inégalité (2) n'est donc vérifiée qu'à partir d'une certaine valeur de n dépendant de x_0, mais il suffit de modifier la valeur de k pour supposer qu'elle est satisfaite quel que soit n. La nouvelle valeur de k dépendra alors de x_0.

8. Considérons maintenant des fonctions de plusieurs variables, par exemple de deux variables réelles x et y : nous nous placerons en général dans le domaine carré (Γ) défini par les inégalités

$$-1 \leqq x \leqq +1, \qquad -1 \leqq y \leqq +1.$$

Soit $P(x, y)$ un polynome de degré m en x et de degré n en y; supposons que le module de ce polynome reste inférieur à M lorsque le point (x, y) est dans le carré (Γ); soit (Γ') un rectangle concentrique à (Γ) dont les côtés sont parallèles aux axes Ox, Oy et situé tout entier à l'intérieur de (Γ). Proposons-nous d'évaluer une limite supérieure du module des dérivées de $P(x, y)$ pour les points du domaine (Γ').

Donnons à y une valeur fixe y_0 de manière que la droite $y = y_0$ coupe le rectangle (Γ') suivant le segment AB. Pour les points de AB, on a

$$\left|\frac{\partial^p P(x, y_0)}{\partial x^p}\right| \leqq k' m^p M,$$

p étant un entier et k' une constante indépendante de y_0. Il en

résulte que, pour tout point de (Γ'),

$$\left|\frac{\partial^p P(x, y)}{\partial x^p}\right| \leqq k' m^p M.$$

Cette dérivée $p^{\text{ième}}$ est encore un polynome $P_1(x, y)$, en particulier un polynome en y de degré n auquel on peut appliquer le résultat précédent; on aura

$$\left|\frac{\partial^q P_1(x, y)}{\partial y^q}\right| \leqq k'' n^q (k' M m^p),$$

q étant un entier et k'' une constante. Par suite, en posant $k = k' k''$,

$$\left|\frac{\partial^{p+q} P(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}\right| \leqq k m^p n^q M.$$

9. Pour étendre ce résultat aux dérivées d'ordre non entier, nous adopterons la définition suivante : si $p - 1 \leqq \alpha < p$ et $q - 1 \leqq \beta < q$, la dérivée d'ordre α en x et β en y de la fonction $f(x, y)$ est

$$D_{x^\alpha y^\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y) = \frac{\partial^{p+q} F(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$$

en posant

$$F(x, y) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)\Gamma(q-\beta)} \times \int_{-1}^{x} \int_{-1}^{y} (x-z)^{p-\alpha-1} (y-u)^{q-\beta-1} f(z, u)\, dz\, du.$$

Supposons que toutes les dérivées de F jusqu'à l'ordre $p+q$ soient continues et montrons qu'on peut obtenir la dérivée d'ordre $\alpha+\beta$ en prenant d'abord la dérivée d'ordre α en x de la fonction $f(x, y)$, puis la dérivée d'ordre β en y de cette première dérivée ou en faisant l'inverse. Posons pour cela

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f(z, y)\, dz.$$

On aura

$$(1) \qquad F(x, y) = \frac{1}{\Gamma(q-\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{q-\beta-1} \Phi(x, u)\, du.$$

La dérivée d'ordre q en y de $F(x, y)$ existe, c'est-à-dire que $\Phi(x, y)$ admet une dérivée d'ordre β; on en déduit, par les formules du n° 5, en remarquant que $F(-1, y)$ est nul quel que

soit y

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{\beta-1} F_{yq}^{(q)}(x, u)\, du.$$

Or, la fonction $F_{yq}^{(q)}(x, y)$ admet une dérivée continue d'ordre p en x, il en est de même pour $\Phi(x, y)$ et

$$\Phi_{xp}^{(p)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{\beta-1} F_{xpyq}^{(p+q)}(x, u)\, du.$$

Cette expression, en tenant compte de la valeur de $\Phi(x, y)$, n'est autre que $D_{x\alpha}^{(\alpha)} f(x, y)$ dont on montre ainsi l'existence. Dérivons maintenant p fois par rapport à x les deux membres de l'égalité (1), on aura

$$F_{yp}^{(p)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(q-\beta)} \int_{-1}^{y} (y-u)^{q-\beta-1} D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, u)\, du;$$

cette nouvelle fonction admet par hypothèse une dérivée d'ordre q en y qui est par définition la dérivée d'ordre β en y de $D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y)$. On obtient ainsi

$$D_{x\alpha y\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y) = F_{xpyq}^{(p+q)}(x, y) = D_{y\beta}^{\beta} D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y).$$

On démontrerait de même l'égalité

$$D_{x\alpha y\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y) = D_{x\alpha}^{\alpha} D_{y\beta}^{\beta} f(x, y).$$

10. Il est maintenant facile d'étendre aux dérivées partielles d'ordre quelconque les résultats du n° 8. Soit $P(x, y)$ un polynome de degré m en x, de degré n en y et dont le module ne dépasse pas M, dans le carré Γ'. On a, dans Γ',

$$|D_{x\alpha}^{\alpha} f(x, y)| < k' m^{\alpha} M;$$

Pour obtenir cette dérivée, il faut d'abord calculer l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} P(z, y)\, dz$$

qui est un polynome en y, de degré n, $Q(y)$; ensuite, prendre la dérivée d'ordre p en x de ce polynome. Le résultat est encore un polynome en y de degré n, $R(y)$, car les coefficients du poly-

nome $Q(y)$ sont de la forme $x^{-\alpha}S(x)$, S étant un polynome en x et peuvent être dérivés p fois. Appliquons au polynome $R(y)$ le théorème relatif au maximum du module d'une dérivée d'ordre β d'un polynome.

$$|D_{y^\beta}^{\beta} R(y)| < k'' n^\beta N,$$

N étant une limite supérieure de $R(y)$; on peut prendre

$$N = k' m^\alpha M,$$

d'où, en posant $k = k'k''$,

$$|D_{x^\alpha y^\beta}^{\alpha+\beta} f(x, y)| < k m^\alpha n^\beta M.$$

CHAPITRE II.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

11. Je vais rappeler un théorème de M. S. Bernstein [1] liant l'existence des dérivées d'une fonction $f(x)$ à la rapidité de la décroissance de la meilleure approximation de cette fonction par un polynome $P_n(x)$ de degré n, lorsque l'entier n croît indéfiniment. Comme je me propose d'étendre le théorème de M. S. Bernstein au cas des dérivées d'ordre quelconque, entier ou non, je demontrerai d'abord la proposition suivante :

Soit $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions convergeant uniformément vers $f(x)$; si la suite $f_1^{(\alpha)}(x)$, $f_2^{(\alpha)}(x), \ldots, f_n^{(\alpha)}(x), \ldots$ converge uniformément, elle a pour limite $f^{(\alpha)}(x)$.

Je supposerai, comme toujours dans la suite, que les fonctions sont définies et bornées dans l'intervalle $(-1, +1)$ et je dirai qu'une suite u_n converge uniformément lorsque la série dont le terme général est $(u_{n+1} - u_n)$ converge uniformément.

Soit p le plus petit entier dépassant α, posons

$$F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f_n(z)\, dz \qquad (p-1 \leq \alpha < p),$$

---

[1] *Sur l'ordre de la meilleure approximation*, etc., p. 29.

on a

$$f_n^{(\alpha)}(x) = F_n^{(p)}(x).$$

Soit, de même,

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} f(z)\, dz,$$

on aura

$$F(x) - F_n(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1} [f(z) - f_n(z)]\, dz$$

et

$$|F(x) - F_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(p-\alpha)} \int_{-1}^{x} (x-z)^{p-\alpha-1}\, dz = \frac{2^{p-\alpha}\varepsilon}{\Gamma(p-\alpha+1)},$$

si n est assez grand pour que $f(x) - f_n(x)$ ait, dans l'intervalle $(-1, +1)$, un module inférieur à ε.

La suite $F_n(x)$ converge donc uniformément vers $F(x)$; mais la suite $F_n^{(p)}(x)$ converge uniformément, par hypothèse; elle a donc pour limite $F^{(p)}(x)$, c'est-à-dire $f^{(\alpha)}(x)$. Comme la suite $F_n^{(p)}(x)$ n'est autre que la suite $f_n^{(\alpha)}(x)$, le théorème est démontré.

12. Voici maintenant la proposition de M. S. Bernstein dont je modifie l'énoncé pour l'étendre au cas d'une dérivée quelconque.

Si, quel que soit l'entier n, il existe un polynome $P_n(x)$ de degré n, tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{n^\alpha},$$

A et α étant des constantes positives, $f(x)$ possède des dérivées d'ordre α' inférieur à α.

Supposons d'abord $\alpha' < \alpha - 1$ $(\alpha > 1)$, on a

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| < \frac{2A}{n^\alpha};$$

cette différence est un polynome entier de degré $n+1$ auquel nous pouvons appliquer les théorèmes du Chapitre précédent, donc

$$|P_{n+1}^{(\alpha')}(x) - P_n^{(\alpha')}(x)| < \frac{2kA(n+1)^{\alpha'}}{n^\alpha} < \frac{B}{n^{\alpha-\alpha'}};$$

comme $\alpha - \alpha' > 1$, la série $[P_{n+1}^{(\alpha')} - P_n^{(\alpha')}]$ est uniformément convergente et sa somme représente $f^{(\alpha')}(x)$.

Supposons maintenant que $\alpha - 1 \leq \alpha' < \alpha$ et calculons une limite supérieure du reste de la série $P_n^{(\alpha')}(x)$ lorsqu'on s'arrête au terme de rang n; soit $2^{m-1} < n < 2^m$; le reste est représenté par la série

$$\left[P_{2^m}^{(\alpha')} - P_n^{(\alpha')}\right] + \left[P_{2^{m+1}}^{(\alpha')} - P_{2^m}^{(\alpha')}\right] + \ldots.$$

Le premier terme de cette série est, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{2kA2^{m\alpha'}}{n^\alpha} < \frac{2kA2^{m\alpha'}}{2^{(m-1)\alpha}} = 2^{1+\alpha}kA\,\frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')m}},$$

le second terme est inférieur à

$$\frac{2kA2^{(m+1)\alpha'}}{2^{m\alpha}} = 2^{1+\alpha}kA\,\frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')(m+1)}},$$

et ainsi de suite, le reste est donc inférieur à

$$\frac{B}{2^{(\alpha-\alpha')m}}\left[1 + \frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')}} + \ldots + \frac{1}{2^{(\alpha-\alpha')p}} + \ldots\right] = \frac{C}{2^{(\alpha-\alpha')m}} < \frac{C}{n^{\alpha-\alpha'}},$$

B et C désignant des constantes; comme $\alpha - \alpha' > 0$, la suite $P_n^{(\alpha')}(x)$ est uniformément convergente et a pour limite $f^{(\alpha')}(x)$; bien entendu, cette seconde partie de la démonstration s'applique aussi au cas où $\alpha' < \alpha - 1$. Les raisonnements supposent que x varie dans un intervalle quelconque *intérieur* à $(-1, +1)$. Ils montrent que, dans un tel intervalle, la dérivée d'ordre α' *entier* de $f(x)$ peut être approchée par un polynome de degré n au plus avec une erreur moindre que $\frac{A'}{n^{\alpha-\alpha'}}$.

13. Donnons à la variable x des accroissements égaux à h, nous pourrons former les différences

$$\begin{aligned}
&\Delta_h\, f(x) = f(x+h) - f(x),\\
&\Delta_h^2\, f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\\
&\Delta_h^3\, f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

nous désignerons plus brièvement ces différences par Δ, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, ... Nous allons montrer comment l'hypothèse que l'un des rapports $\left|\frac{\Delta^r}{h^r}\right|$ est borné entraîne pour $f(x)$ l'existence de dérivées

d'ordre inférieur à r. Pour faire cette démonstration, nous établirons que si $\left|\frac{\Delta^r}{h^r}\right|$ est borné, on peut représenter $f(x)$ par un polynome $P_n(x)$ avec une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^r}$; la proposition du paragraphe précédent nous conduira au résultat.

Nous prouverons l'existence des polynomes $P_n(x)$ en adoptant la marche suivie par M. Dunham Jackson [1] pour le cas où $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à un certain ordre; je modifierai sa démonstration sur quelques points et, en particulier j'introduirai des fonctions de Bessel à la place des puissances de la fonction $\frac{\sin x}{x}$. Je désignerai par $J_h(x)$ la fonction de Bessel d'ordre entier h, c'est-à-dire la série entière

$$(1)\qquad J_h(x) = \frac{x^h}{2^h}\left[\frac{1}{h!} - \frac{x^2}{2^2.2!(h+2)!} - \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{2^{2p}p!(h+p)!} + \dots\right];$$

on a aussi

$$(2)\qquad J_h(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - h\varphi)\,d\varphi$$

et

$$J_h(x) = \frac{x^h}{1.3.5\dots(2h-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2h}\varphi\,d\varphi.$$

Appelons I_h la dernière intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2h}\varphi\,d\varphi,$$

on démontre que

$$\int_0^\infty I_h(x)\,dx = 1\ (^2);$$

donc, si l'on pose

$$K_h(x) = \frac{1}{8e}\,I_h\left(\frac{x}{4e}\right),$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_h(x)\,dx = 1.$$

---

(1) *Ueber die genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebener Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung* (Göttingen, Mémoire couronné et dissertation inaugurale, 1911).

(2) Pour cette formule et les précédentes, *voir*, par exemple, GRAY and MATHEWS, *Treatise on Bessel functions* (Londres, Macmillan and Co. 1895).

D'ailleurs $I_h(x) = C\frac{J_h(x)}{x^h}$ et comme $|J_h(x)| \leq 1$ d'après la formule (2), on voit que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r I_h(x)|\,dx$ a un sens pour $h > r - 1$; il en est de même des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r K_h(x)|\,dx$. C'est la fonction $K_h(x)$ que nous utiliserons dans la suite. Nous désignerons par $K(x)$, sans indice, une fonction $K_h(x)$ pour laquelle h est supérieur ou égal à 2.

14. Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\left|\frac{\Delta_h}{h}\right|$ est borné. Nous pouvons toujours supposer que $f(-1) = f(+1) = 0$, en retranchant au besoin de $f(x)$ une fonction linéaire; nous prendrons $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$; ainsi la fonction $f(x)$ est définie quel que soit x et l'on a, pour toute valeur de x, $|\Delta h| < A|h|$, A étant une constante. Évaluons l'intégrale

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}} K(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) - f(x)\right] K(\alpha)\,d\alpha.$$

Nous avons ici

$$\left|f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) - f(x)\right| \leq A\frac{|\alpha|}{n},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha K(\alpha)|\,d\alpha = B \qquad (h \geq 3),$$

donc

$$|S| < \frac{A}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha K(\alpha)|\,d\alpha = \frac{AB}{n}.$$

D'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(\alpha)\,d\alpha = f(x)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) K(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} nf(\alpha) K[n(\alpha - x)]\,d\alpha$$

$$= \int_{-1}^{+1} nf(\alpha) K[n(\alpha - x)] = U_n(x),$$

donc

$$|f(x) - U_n(x)| < \frac{AB}{n}.$$

D'autre part, si l'on développe $K(x)$ en série entière, le terme

général est, à un facteur constant près,

$$(-1)^p \left(\frac{x}{8e}\right)^{2p} \frac{1}{p!(h+p)!};$$

pour $K[n(\alpha - x)]$, le terme général, de rang $p+1$, est

$$(-1)^p \frac{n^{2p}(\alpha - x)^{2p}}{(8e)^{2p} p!(h+p)!}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est, en valeur absolue,

$$\frac{n^2(\alpha - x)^2}{(8e)^2 p(h+p)} < \frac{n^2}{16e^2(2p)^2}$$

si, comme nous le supposerons désormais, $|x|$ est inférieur à 1. Lorsque $2p \geqq n$, le rapport est inférieur à 1, la série alternée a des termes dont la valeur absolue, à partir d'un rang supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$, va en décroissant; le reste de cette série ne dépasse donc pas, en module, la valeur de son premier terme.

Supposons n pair et égal à 2ν, nous prendrons $p = \nu$, on a alors, en prenant la somme des p premiers termes de la série, un polynome $Q_n(\alpha - x)$ de degré $n-2$ et le reste R_n vérifie l'inégalité

$$R_n \leqq C \frac{\nu^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2}.$$

Si n est impair et égal à $2\nu - 1$, nous prendrons encore $p = \nu$: $Q_n(\alpha - x)$ sera un polynome de degré $n-1$ et le reste R_n vérifiera l'inégalité

$$R_n \leqq C \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2} < C \frac{\nu^{2\nu}}{(2e)^{2\nu}(\nu!)^2}.$$

Or l'expression $u_\nu = \frac{\nu^{2\nu}}{e^{2\nu}(\nu!)^2}$ décroît avec ν, car le rapport

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \left[\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \frac{1}{e}\right]^2$$

est inférieur à 1, donc

$$u_\nu < u_1 = \frac{1}{e^2} < 1,$$

$$R_n < \frac{C}{2^{2\nu}} \leqq \frac{C}{2^n}.$$

On a, par suite,

$$|nK[n(\alpha - x)] - nQ_n(\alpha - x)| < \frac{nC}{2^n} < \frac{D}{n}$$

et

$$\left| U_n(x) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha) n Q_n(\alpha - x)\, d\alpha \right| < \frac{D}{n} \int_{-1}^{+1} |f(\alpha)|\, d\alpha = \frac{DE}{n};$$

$Q_n(\alpha - x)$ étant un polynome entier de degré inférieur à n, il en est de même de l'intégrale

$$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha) n Q_n(\alpha - x)\, d\alpha,$$

donc,

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{AB - DE}{n} = \frac{F}{n}.$$

Si nous avions seulement supposé que

$$|\Delta f(x)| < k|h|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1),$$

le même raisonnement nous eût conduits à un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Il en résulte que $f(x)$ possède des dérivées d'ordre $\alpha' < \alpha$. Donc :

Si une fonction $f(x)$ satisfait, dans l'intervalle $(-1, +1)$, à une condition de Lipschitz d'exposant α, cette fonction admet des dérivées d'un ordre quelconque α' inférieur à α [1].

15. Supposons maintenant que l'un des rapports $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ soit borné et prenons, par exemple, $r = 2$. Nous formerons l'intégrale

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}}^2 K(\alpha)\, d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) - 2f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) + f(x) \right] K(\alpha)\, d\alpha, \end{aligned}$$

la fonction $K(x)$ correspondant, cette fois, à un indice h supérieur ou égal à 4. Nous ferons varier x dans un intervalle intérieur à $(-1, +1)$; nous prendrons l'intervalle $(-1 + \delta, 1 - \delta)$; pour

---

[1] Pendant la correction des épreuves, j'ai connaissance d'un travail de M. Hermann Weyl où cette proposition est établie par une étude des coefficients de Fourier de la fonction : *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden gesellschaft in Zürich*, 1917 p. 296).

l'intégration, nous supposerons que $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$. Si

$$\frac{|\alpha|}{n} \leqq \frac{\delta}{2} \qquad \text{ou} \qquad |\alpha| \leqq \frac{n\delta}{2},$$

les points x, $x + \frac{\alpha}{n}$, $x + \frac{2\alpha}{n}$ sont intérieurs au segment $(-1, +1)$ et l'on a

$$\left| f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) - 2f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) + f(x) \right| < A' \frac{\alpha^2}{n^2}.$$

Si $|\alpha| > \frac{n\delta}{2}$, on a l'inégalité

$$\frac{\left| f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) - 2f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) + f(x) \right|}{\frac{\alpha^2}{n^2}} < \frac{4M}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = A'',$$

M désignant le module maximum de $f(x)$; on a donc, quel que soit α,

$$\left| \Delta_{\frac{\alpha}{n}}^{2)} \right| < A \frac{\alpha^2}{n^2}$$

et

$$|S| < \frac{A}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha^2 K(\alpha)| \, d\alpha = \frac{AB}{n^2}.$$

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(\alpha) \, d\alpha \qquad = f(x),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{\alpha}{n}\right) K(\alpha) \, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} n f(\alpha) K[n(\alpha - x)] \, d\alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2\alpha}{n}\right) K(\alpha) \, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} n f(\alpha) \frac{K\left[n \frac{\alpha - x}{2}\right]}{2} \, d\alpha,$$

et, comme $f(\alpha)$ est nul pour $|\alpha| > 1$, il suffira de prendre ces dernières intégrales entre les limites -1 et $+1$. Soit

$$U_n(x) = \int_{-1}^{+1} n f(\alpha) \left\{ 2K[n(\alpha - x)] - \frac{1}{2} K\left[n \frac{\alpha - x}{2}\right] \right\} d\alpha;$$

on aura

$$|f(x) - U_n(x)| < \frac{AB}{n^2}.$$

Nous pouvons maintenant remplacer

$$K[n(\alpha - x)] \quad \text{et} \quad K\left[n\frac{\alpha - x}{2}\right]$$

par des polynomes de degrés inférieurs à n et avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{2^n}$. On peut donc remplacer la différence L_n placée entre accolades par un polynome $Q_n(\alpha - x)$ avec une erreur inférieure à $\frac{C}{2^n}$. Nous aurons alors

$$|nL_n(\alpha - x) - nQ_n(\alpha - x)| < \frac{nC}{2^n} < \frac{D}{n^2},$$

et

$$\left|U_n(x) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha)\, nQ_n(\alpha - x)\, d\alpha\right| < \frac{D}{n^2}\int_{-1}^{+1} |f(\alpha)|\, d\alpha = \frac{DE}{n^2};$$

par conséquent, en désignant par $P_n(x)$ l'intégrale du premier membre

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{AB + DE}{n^2} = \frac{F}{n^2}.$$

Si l'on avait seulement supposé que $\left|\frac{\Delta_h^{(2)}}{h^\alpha}\right|$ $(1 \leqq \alpha \leqq 2)$ est borné, les mêmes raisonnements auraient conduit à un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Le cas général se traite de la même manière; il suffit d'introduire l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\frac{\alpha}{n}}^{(r)} K(\alpha)\, d\alpha,$$

dans laquelle $K(\alpha)$ correspond à un indice $h \geqq r + 2$. On représente alors $f(x)$, avec une erreur moindre que $\frac{AB}{n^r}$ par une intégrale $V_n(x)$ portant sur une somme de fonctions de la forme $nK\left[n\frac{\alpha - x}{s}\right]$, s étant un des nombres $1, 2, \ldots, r$. A son tour, chaque fonction nK est remplacée par un polynome, en limitant son développement en série au terme de degré $n - 1$ ou $n - 2$; la nouvelle erreur est de l'ordre de $\frac{n}{2^n}$ et par conséquent d'un

ordre inférieur à $\frac{1}{n^r}$. On en déduit, comme plus haut, qu'on peut trouver un polynome $P_n(x)$ tel que

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{F}{n^r}.$$

Si c'est le rapport $\left|\frac{\Delta^r}{h^\alpha}\right|$ qui est borné, avec $r - 1 \leqq \alpha \leqq r$, on aura un polynome $P_n(x)$ pour lequel

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{G}{n^\alpha}.$$

Appliquons maintenant à la fonction $f(x)$ le théorème du n° 11, nous voyons qu'elle admet des dérivées d'un ordre quelconque inférieur à r dans le premier cas ou inférieur à α dans le second. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Soit $f(x)$, une fonction bornée dans l'intervalle $(-1, +1)$ et telle que le rapport $\frac{\Delta_h^r}{h^r}$ ait un module borné dans cet intervalle; pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle, la fonction admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à r. Si le rapport $\frac{\Delta_h^r}{h^\alpha}$, dans lequel α est compris entre $r - 1$ et r, a un module borné, la fonction admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à α.

Par exemple, si $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est borné, $f(x)$ admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à 1; pour la dérivée d'ordre 1, on sait que M. Lebesgue a démontré qu'elle existe presque partout. Si $\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$ est borné, $f(x)$ admet une dérivée d'un ordre quelconque inférieur à 2; en particulier, la dérivée première existe partout [1]. Pour le cas général où $\left|\frac{\Delta_h^r}{h^r}\right|$ est borné, les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(r-1)}(x)$ existent en tout point intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$.

---

[1] Il en est de même si le rapport $\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^\alpha}$ dans lequel $1 < \alpha \leqq 2$, est borné.

16. Les démonstrations précédentes s'appliquent au cas où la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$, la dérivée d'ordre $r-1$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'exposant β. On a, en effet,

$$\frac{\Delta_h^{(r)} f(x)}{h^{r-1}} = \frac{\Delta_h^{(r-1)} f(x+h) - \Delta_h^{(r-1)} f(x)}{h^{r-1}} = \frac{\Delta_h^{(r-1)} f'(x_1)}{h^{r-2}};$$

de même,

$$\frac{\Delta_h^{(r-1)} f'(x_1)}{h^{r-2}} = \frac{\Delta_h^{(r-2)} f''(x_2)}{h^{r-3}} = \ldots = \Delta f^{(r-1)}(x_{r-1}).$$

Par hypothèse, cette dernière différence a un module inférieur à $|h|^\beta$, donc $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^{r+\beta-1}}\right|$ est borné. Si la dérivée d'ordre r existe, la dernière différence est égale à $hf^{(r)}(x_r)$ et $\left|\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}\right|$ est borné en même temps que $|f^{(r)}(x)|$.

On peut observer que, dans le cas précédent, il est possible de prolonger $f(x)$ dans un intervalle $(-1-\delta, 1+\delta)$ contenant $(-1, +1)$ de manière à conserver les hypothèses faites sur $f(x)$. On en déduit que l'approximation par les polynomes $P_n(x)$ est valable uniformément pour tout le segment $(-1, +1)$; mais je renverrai pour ce point au travail de M. Dunham Jackson.

Enfin, on peut encore remarquer que l'existence, pour la fonction $f(x)$, des dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$, la dérivée d'ordre $r-1$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'exposant β, entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres, entiers ou non, inférieurs à $r+\beta-1$.

CHAPITRE III.

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

17. L'ordre de grandeur de la meilleure approximation d'une fonction $f(x)$ par un polynome de degré n dépend des propriétés différentielles de cette fonction. Si nous passons à une fonction de deux variables $f(x, y)$, la meilleure approximation sera liée aux propriétés différentielles par rapport à x et par rapport à y. Il y aura donc lieu de faire intervenir séparément le degré du

polynome par rapport à x et son degré par rapport à y. Si l'on se bornait à considérer le degré d'un polynome $P(x, y)$ par rapport à l'ensemble des variables, on n'arriverait pas à modeler exactement l'ordre de grandeur de la meilleure approximation sur les propriétés différentielles.

Nous introduirons donc des polynomes $P_{m,n}(x, y)$ de degré m en x et de degré n en y et nous serons conduits à représenter la meilleure approximation, pour un polynome de degrés m et n, par des expressions de la forme $\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$; A et α, B et β étant des nombres positifs dépendant des propriétés différentielles de $f(x, y)$ respectivement par rapport à x et par rapport à y.

18. Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans le carré $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$; nous supposons que, quels que soient les entiers m et n, il existe un polynome $P_{m,n}(x, y)$, de degrés m et n, vérifiant l'inégalité

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}$$

et nous nous proposons d'en déduire des conséquences relatives à l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$.

Soient $\alpha \geqq \beta$ et α', β' deux nombres positifs, entiers ou non, respectivement inférieurs à α et β; nous désignerons par $P_{m,n}^{\alpha',\beta'}$ la dérivée partielle $\frac{\partial^{\alpha'+\beta'} P_{m,n}(x, y)}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{\beta'}}$. On a

$$|P_{m+\mu,n+\nu}(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{2A}{m^\alpha} + \frac{2B}{n^\beta},$$

$$\left|P_{m+\mu,n+\nu}^{(\alpha',\beta')} - P_{m,n}^{(\alpha',\beta')}\right| < k\left(\frac{2A}{m^\alpha} + \frac{2B}{n^\beta}\right)(m+\mu)^{\alpha'}(m+\nu)^{\beta'}.$$

Il suffit, en effet, d'appliquer au polynome du premier membre de la première inégalité, dont les degrés sont $m + \mu$ et $n + \nu$ le résultat du n° 10, en supposant le point (x, y) dans un carré intérieur au carré initial.

Prenons

$$n = E\left[m^{\frac{\alpha}{\beta}}\right], \qquad n + \nu = E\left[(2m)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right],$$

en désignant par $E[x]$ la partie entière du nombre x; on pourra

écrire

$$n > m^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1,$$

$$n^\beta > m^\alpha \left[1 - m^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]^\beta \geq 2^{-\beta} m^\alpha \qquad (\text{si } m \geq 2).$$

et, en prenant $\mu = m$,

$$\left(\frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta}\right)(m+\mu)^{\alpha'}(n+\nu)^{\beta'}$$

$$< \frac{1}{m^\alpha}(A + 2^\beta B)(2m)^{\alpha'}(2m)^{\frac{\alpha\beta'}{\beta}} = C\frac{m^{\frac{\alpha\beta' + \beta\alpha'}{\beta}}}{m^\alpha}.$$

Soit $\alpha\beta - \beta\alpha' - \alpha\beta' = \gamma$, la limite supérieure précédente est égale à $\frac{C}{m^{\frac{\gamma}{\beta}}}$ et, par suite,

$$\left| P^{(\alpha', \beta')}_{m+\mu, n+\nu} - P^{(\alpha', \beta')}_{m, n} \right| < \frac{2kC}{m^{\frac{\gamma}{\beta}}} = \frac{2kC}{\left(2^{\frac{\gamma}{\beta}}\right)^s},$$

si nous choisissons pour m la suite des valeurs 2^s. Nous obtenons ainsi une suite infinie de polynomes $P_s(x, y)$ dont les degrés sont respectivement 2^s et $E\left[2^{\frac{s\alpha}{\beta}}\right]$. Cette suite est absolument convergente si $\gamma > 0$ et sa limite est égale à la dérivée $f^{\alpha'+\beta'}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}$. Il suffirait pour s'en assurer de répéter, pour le cas de plusieurs variables, la démonstration que j'ai donnée au n° 11 : il n'y a qu'à remplacer dans cette démonstration les intégrales simples par des intégrales doubles.

La condition $\gamma > 0$ peut s'écrire

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$$

et s'interpréter géométriquement de la manière la plus simple. Soient $O\alpha$, $O\beta$ deux axes. Faisons correspondre à chaque dérivée d'ordres α' et β', le point de coordonnées α' et β'. Soient A et B les points $(\alpha, 0)$ et $(0, \beta)$. Le point (α', β') doit être à l'intérieur du triangle OAB.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si, quels que soient les entiers positifs m et n, il existe un

polynome $P_{m,n}(x, y)$ *vérifiant l'inégalité*

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{A}{m^\alpha} + \frac{B}{n^\beta},$$

en tout point (x, y) *intérieur au carré* $|x| < 1$, $|y| < 1$, *la fonction* $f(x, y)$ *admet, à l'intérieur du carré, toute dérivée* $f^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}$ *pour laquelle*

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1.$$

19. Nous allons maintenant établir, relativement aux fonctions de deux variables pour lesquelles certains rapports des différences partielles à une puissance de l'accroissement sont bornés, des propositions analogues à celles du Chapitre II. Nous désignerons par $\Delta_h^{(r)}$, la différence d'ordre r pour les accroissements $h, 2h, \ldots, rh$ donnés à x et par $\Delta_k^{(s)}$, la différence d'ordre s pour les accroissements $k, 2k, \ldots, sk$ donnés à y.

Supposons d'abord que les rapports $\left|\frac{\Delta_h}{h}\right|$ et $\left|\frac{\Delta_k}{k}\right|$ soient bornés et que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta_h}{h}\right| < A, \qquad \left|\frac{\Delta_k}{k}\right| < A'.$$

Nous supposerons que $f(x, y)$ est égal à 0 à l'extérieur du carré (Γ) de centre O, de côtés parallèles aux axes et égaux à 2; nous ferons varier le point (x, y) à l'intérieur d'un carré (Γ') concentrique au premier dont les côtés, égaux à $2(1-\delta)$, seront parallèles aux axes. Soit M le module maximum de $f(x, y)$ dans (Γ). Il existe un polynome $Q_m(x)$, de degré m, tel que

$$(1) \qquad \left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y)\, m\, Q_m[m(\alpha - x)]\, d\alpha \right| < \frac{F}{m},$$

F ne dépendant que de A, M, δ.

De même, il existe un polynome $Q_n(y)$, de degré n, tel que

$$f(\alpha, y) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\, n\, Q_n[n(\beta - y)]\, d\beta + \frac{\theta' F'}{n} \qquad (|\theta'| < 1),$$

F' ne dépendant que de A', M, δ. On a d'ailleurs

$$m\, Q_m[m(\alpha - x)] = m\, K[m(\alpha - x)] + \frac{\theta D}{m} \qquad (|\theta| < 1),$$

D ne dépendant que de M. En remplaçant $f(\alpha, y)$ par sa valeur et posant, pour abréger l'écriture,

$$\Theta_1 F_m = m F_m[m(\alpha - x)].$$

F_m étant une fonction quelconque, il vient

$$(2) \quad \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y)\Theta_1 Q_m d\alpha = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\Theta_1 Q_m \Theta_1 Q_n d\alpha\, d\beta = \frac{F'}{n}\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y)\Theta_1 Q$$

La dernière intégrale peut s'écrire

$$\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y)\Theta_1 K\, d\alpha + \frac{D}{m}\int_{-1}^{+1} \theta\theta' f(\alpha, y)\, d\alpha.$$

La première de ces intégrales peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' f\left(x + \frac{\alpha}{m}, y\right) K(\alpha)\, d\alpha$$

et son module est inférieur à

$$M\int_{-\infty}^{+\infty} |K(\alpha)|\, d\alpha = MN;$$

la seconde est inférieure à $\frac{2DM}{m}$; donc, en remplaçant dans (2)

$$\left|\int_{-1}^{+1} f(\alpha, y)\Theta_1 Q_m d\alpha - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\Theta_1 Q_m \Theta_1 Q_n d\alpha\, d\beta\right|$$
$$< \frac{MNF'}{n} + \frac{2DMF'}{mn} \leqq \frac{MF'(N + 2D)}{n} = \frac{G}{n},$$

d'où, en tenant compte de l'inégalité (1),

$$\left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta)\Theta_1 Q_m \Theta_1 Q_n d\alpha\, d\beta \right|$$
$$< \frac{F}{m} + \frac{G}{n}.$$

L'intégrale double est, comme l'élément différentiel, un polynome entier en x, y de degré m en x et de degré n en y que nous désignerons par $P_{m,n}(x, y)$; nous aurons donc

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{F}{m} + \frac{G}{n},$$

et cela, quels que soient les entiers m et n.

Il résulte alors du paragraphe précédent que la fonction $f(x, y)$ admet des dérivées partielles d'ordres α' et β' tels que $\alpha' + \beta' < 1$.

20. Supposons maintenant que les rapports $\left|\frac{\Delta_h^r}{h^r}\right|$ et $\left|\frac{\Delta_k^s}{k^s}\right|$ soient bornés dans (Γ),

$$\left|\frac{\Delta_h^r}{h^r}\right| < A, \qquad \left|\frac{\Delta_k^s}{k^s}\right| < A'.$$

Nous remplacerons encore $f(x, y)$ par 0 à l'extérieur de (Γ) et nous ferons varier le point (x, y) à l'intérieur de (Γ'). Pour faire la démonstration nous prendrons $r = 2$, $s = 1$.

Il existe d'abord un polynome $Q_m(x)$ tel que

$$(3) \qquad \left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) m \left\{ 2 Q_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} Q_m\left[m \frac{\alpha - x}{2}\right] \right\} d\alpha \right| < \frac{F}{m^2}$$

avec

$$(4) \qquad m \left\{ 2 Q_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} Q_m\left[m \frac{\alpha - x}{2}\right] \right\}$$
$$= m \left\{ 2 K \quad [m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} K \quad \left[m \frac{\alpha - x}{2}\right] \right\} + \frac{\theta D}{m^2} \qquad (|\theta| < 1).$$

D'autre part, on peut trouver $Q_n(y)$ tel que

$$(5) \qquad f(\alpha, y) = \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) n Q_n[n(\beta - y)] d\beta + \frac{\theta' F'}{n} \qquad (|\theta'| < 1);$$

remplaçons, dans l'intégrale de l'inégalité (3), $f(\alpha, y)$ par sa valeur tirée de (5) et posons, pour abréger l'écriture,

$$\mathfrak{D}_1 F_n = n F_n[n(\beta - y)],$$
$$\mathfrak{D}_2 F_m = m \left\{ 2 F_m[m(\alpha - x)] - \frac{1}{2} F_m\left[m \frac{\alpha - x}{2}\right] \right\};$$

il viendra

$$(6) \qquad \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) \mathfrak{D}_2 Q_m \, d\alpha$$
$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \mathfrak{D}_2 Q_m \mathfrak{D}_1 Q_n \, d\alpha \, d\beta + \frac{F'}{n} \int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y) \mathfrak{D}_2 Q_m \, d\alpha.$$

Cette dernière intégrale, en tenant compte de (4), s'écrit

$$\int_{-1}^{+1} \theta' f(\alpha, y) \Theta_2 \mathrm{K}\, d\alpha + \frac{\mathrm{D}}{m^2} \int_{-1}^{+1} \theta\theta' f(\alpha, y)\, d\alpha;$$

le second terme est inférieur en valeur absolue à $\frac{2\,\mathrm{MD}}{m^2}$, le premier peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta' f\left(x + \frac{\alpha}{m}\right) \mathrm{K}(\alpha)\, d\alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta' f\left(x - \frac{\alpha}{m}\right) \mathrm{K}(\alpha)\, d\alpha;$$

il est inférieur en valeur absolue à

$$3\,\mathrm{M} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{K}(\alpha)|\, d\alpha = 3\,\mathrm{MN}.$$

Le module du dernier terme de (6) ne surpasse donc pas

$$\frac{3\,\mathrm{MNF}'}{n} + \frac{2\,\mathrm{MDF}'}{m^2 n} \leqq \frac{\mathrm{MF}'(3\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{D})}{n} = \frac{\mathrm{G}}{n},$$

d'où

$$(7) \quad \left| \int_{-1}^{+1} f(\alpha, y) \Theta_2 \mathrm{Q}_m\, d\alpha - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \Theta_2 \mathrm{Q}_m \Theta_1 \mathrm{Q}_n\, d\alpha\, d\beta \right| < \frac{\mathrm{G}}{n},$$

et, en comparant (3) et (7),

$$\left| f(x, y) - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \Theta_2 \mathrm{Q}_m \Theta_1 \mathrm{Q}_n\, d\alpha\, d\beta \right| < \frac{\mathrm{F}}{m^2} + \frac{\mathrm{G}}{n}.$$

L'intégrale double est, comme l'élément différentiel, un polynome en x, y de degrés m et n que nous désignerons encore par $\mathrm{P}_{m,n}(x, y)$; nous aurons donc

$$|f(x, y) - \mathrm{P}_{m,n}(x, y)| < \frac{\mathrm{F}}{m^2} + \frac{\mathrm{G}}{n},$$

et cela, quels que soient les entiers m et n.

Il résulte du théorème établi au n° 18 que les dérivées $f^{\alpha'+\beta'}_{x^{\alpha'} y^{\beta'}}$ pour lesquelles $\frac{\alpha'}{2} + \beta' < 1$, existent à l'intérieur de Γ. Par exemple, la dérivée f'_x existe.

On est ainsi conduit au théorème général suivant :

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans l'intérieur d'un do-

maine (Γ) *et telle que, à l'intérieur de ce domaine, les rapports* $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^r}$ *et* $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^s}$ *soient bornés : cette fonction admet, à l'intérieur de* (Γ), *toutes les dérivées partielles* $f_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}^{\alpha'+\beta'}$ *pour lesquelles*

$$\frac{\alpha'}{r} + \frac{\beta'}{s} < 1.$$

Par exemple, si les rapports $\frac{\Delta_h^{(2)}}{h^2}$ et $\frac{\Delta_k^{(2)}}{k^2}$ sont bornés, les dérivées f'_x et f'_y existent; si les rapports $\frac{\Delta_h^{(3)}}{h^3}$ et $\frac{\Delta_k^{(3)}}{k^3}$ sont bornés, les dérivées f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} existent partout [1].

Si nous supposons que tous les rapports

$$\frac{\Delta_h^r}{h^r}, \quad \frac{\Delta_k^s}{k^s}$$

sont bornés pour chaque valeur de r *et de* s, *on en déduit que la fonction* $f(x, y)$ *possède des dérivées partielles de tous les ordres.*

21. Plus généralement, nous pourrions supposer que le rapport $\frac{\Delta_h^{(r)}}{h^\alpha}$ $(\alpha \leqq r)$ et que le rapport $\frac{\Delta_k^{(s)}}{k^\beta}$ $(\beta \leqq s)$ sont bornés. On en déduirait l'existence de polynomes $P_{m,n}(x, y)$ pour lesquels

$$|f(x, y) - P_{m,n}(x, y)| < \frac{F}{m^\alpha} + \frac{G}{n^\beta},$$

et par suite que les dérivées $f_{x^{\alpha'}y^{\beta'}}^{\alpha'+\beta'}$, pour lesquelles $\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1$, existent en tout point intérieur à (Γ).

Nous nous trouverons, dans les hypothèses précédentes si, par exemple, les dérivées f'_x, f''_{x^2}, ..., $f_{x^{\lambda-1}}^{(\lambda-1)}$ existent et satisfont à une condition de Lipschitz par rapport à x d'ordre λ et si les dérivées f'_y, f''_{y^2}, ..., $f_{y^{\mu-1}}^{(\mu-1)}$ existent et satisfont à une condition de Lipschitz par rapport à y d'ordre μ. Nous avons vu qu'il suffit de

---

[1] On peut même établir que ces dérivées sont continues et satisfont à des conditions de Lipschitz.

prendre

$$\alpha = r - 1 + \lambda \qquad \text{et} \qquad \beta = s - 1 + \mu$$

pour être ramené au cas précédent.

Il en sera ainsi, en particulier, si les dérivées $f_x^{(r)}$ et $f_y^{(s)}$ existent et sont bornées. Si nous supposons enfin que les dérivées $f_x^{(r)}$ et $f_y^{(s)}$ existent quels que soient les entiers r et s, nous pouvons en conclure l'existence dans (Γ) de toutes les dérivées $f_{x^\alpha y^\beta}^{\alpha+\beta}$. Ce dernier théorème, au moins lorsque α et β sont entiers, a déjà été établi par M. S. Bernstein [1].

---

[1] *Loc. cit.*, p. 98.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLVI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1916.)

Pages.

[I 23 a] (**Amsler.**) Sur le développement aux fractions continues d'une irrationnelle quadratique..... 10

[J 2 f] (**E. Borel.**) Sur la répartition probable et les fluctuations des distances mutuelles d'un nombre fini de points, droites et plans..... 105

[P²6] (**E. Cartan.**) Sur certaines hypersurfaces de l'espace conforme réel à cinq dimensions..... 84

[D 2 a α] (**E. Cotton.**) Sur certains critères de convergence..... 69

[D 1 b β] (**P. Humbert.**) Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre..... 120

[H 11 c γ] (**P. Lévy.**) Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme..... 35

[L 23 a] (**Ed. Maillet.**) Sur certains types de fractions continues arithmétiques..... 1

[D 1 b ε] (**P. Montel.**) Sur les polynomes d'approximation..... 151

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLVI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
59150 Quai des Grands-Augustins, 55.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1918.

60448 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1918.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1918 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPÉLL. DEMOULIN. DERUYTS. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. NEUBERG. PAINLEVÉ. PICARD. VALLÉE POUSSIN (DE LA). VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. MAILLET.
Vice-Présidents.....	BOULANGER. CAHEN. DRACH. LEBESGUE.
Secrétaires.....	P. LÉVY. MONTEL.
Vice-Secrétaires.....	THYBAUT. TRESSE.
Archiviste.....	FATOU.
Trésorier.....	SERVANT.
Membres du Conseil (2)	ANDOYER, 1919. BIOCHE, 1921. BLUTEL, 1919. BOREL, 1921. CARTAN, 1919. CARVALLO, 1920. FOUCHÉ, 1920. FOURET, 1921. GOURSAT, 1920. GUICHARD, 1919. QUIQUET, 1920.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

En raison de l'état de guerre actuel, le Conseil de la Société mathématique de France a décidé de suspendre les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous :

Date de l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).

1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).

1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.

1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7e).

1910. **ARCHIBALD** (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).

1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5e).

1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.

1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).

1917. **BARRAU** (J.-A.), professeur à l'Université, à Groningen (Hollande).

1905. **BARRÉ**, chef de bataillon du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5e).

1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P. (1).

1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17e). S. P.

1910. **BERTRAND** (G.), rue de la Vieille-Église, 2, à Versailles.

1913. **BILIMOVITCH**, privat-dozent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e). S. P.

1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).

1902. **BOBERIL** (comte Roger DU), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.

1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.

1892. **BONAPARTE** (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).

1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e). S. P.

1913. **BORTOLOTTI** (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne, (Italie).

1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).

1896. **BOULANGER**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Louis-Hervé, 15, à Versailles (Seine-et-Oise).

1913. **BOULIGAND**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Rennes (Ile-et-Vilaine).

1896. **BOURGET** (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18e).

1904. **BOUTROUX** (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.

---

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels

Date de l'admission.

1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14e).
1911. **BRATU**, professeur, stradela Goliei, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. **BROWNE**, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. **CAHEN**, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1893. **CALDARERA**, ancien professeur à l'Université de Palerme, via Umberto I, 65, à Catania (Italie).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17e).
1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5e). S. P.
1917. **CAUDÈZE**, lieutenant-colonel, place du Square, 13, à Aurillac (Cantal).
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
1896. **CHARVE**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.
1911. **CHATELET**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1913. **COBLYN**, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16e).
1915. **CONSTANTINIDÈS**, professeur au gymnase de Phodos (Grèce).
1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1914. **CRELIER**, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27 *bis*, à Montpellier.
1901. **DELASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. **DELVILLE** (L.), ingénieur aux forges et aciéries de Huta-Bankowa, à Dombrowa (Pologne, Russie).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. **DENJOY**, professeur à l'Université d'Utrecht (Hollande).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1914. **DONDER** (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).

Date de l'admission.

1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5e).

1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).

1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.

1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).

1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).

1902 **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).

1915. **ESCLANGON**, astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).

1912. **EISENHARDT** (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 29, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).

1916. **ELCUS**, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8e). S. P.

1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.

1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.

1907. **ETZEL**, professeur de mathématiques et d'astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).

1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).

1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.

1906. **FARAGGI**, professeur, galerie Sarlande, 1, à Alger.

1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14e).

1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.

1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).

1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).

1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.

1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).

1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).

1903. **FORD** (Walter B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).

1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).

1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e). S. P.

1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).

1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.

1903. **FUETER**, ancien président de la Société mathématique suisse, ancien professeur à l'Université de Bâle, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9III, à Karlsruhe (Allemagne).

1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7e).

1900. **GALDEANO** (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).

1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, à Étoile (Drôme).

1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).

1908. **GARNIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Poitiers.

Date de l'admission.

1911. **GAU**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.

1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).

1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).

1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.

1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).

1913. **GIRAUD**, agrégé de mathématiques, rue Le Verrier, 11, à Paris (6e).

1917. **GLOBA-MIKHAÏLENKO**, docteur ès sciences, avenue des Gobelins, 10 *bis*, à Paris (5e).

1913. **GODEAUX**, rue Victor-Cousin, 6, à Paris.

1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).

1914. **GOLOUBEFF** (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1907. **GOT** (Th.), docteur ès sciences, section technique du génie, rue de Bellechasse, 39, à Paris (7e).

1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 *bis*, à Paris (5e). S. P.

1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris (8e).

1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).

1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.

1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Fontaine, 19, à Paris (16e).

1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).

1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.

1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.

1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).

1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).

1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.

1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, Hicks Avenue, 304, à Columbia (Missouri, États-Unis).

1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).

1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).

1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).

1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17e). S. P.

1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Bonaparte, 30, à Paris (6e).

1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.

1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).

1896. **JACQUET** (E.), professeur, au lycée Henri IV, rue Notre-Dame-des-Champs, 76, à Paris (6e).

1914. **JAGER** (F.), licencié ès sciences, avenue de la Grande-Armée, 69, à Paris (16e).

Date de l'admission.

1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Amicisvej, 16, à Copenhague V. (Danemark).

1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7e). S. P.

1916. **KAMPÉ DE FÉRIET**, docteur ès sciences, Grand Hôtel de Bretagne, à Lorient (Morbihan).

1913. **KASNER** (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).

1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14e).

1913. **KIVELIOVITCH**, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5e).

1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).

1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14e).

1913. **KOSTITZIN** (V.), avenue Villemin, 32, à Paris.

1907. **KRYLOFF**, ingénieur des Mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).

1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17e).

1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).

1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.

1893. **LANCELIN**, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).

1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14e).

1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Trinité, 10, à Toulouse.

1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14e).

1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.

1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11e).

1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.

1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).

1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Meissonier, à Antibes (Alpes-Maritimes).

1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.

1898. **LE ROY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6e).

1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).

1907. **LESGOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6e).

1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6e).

1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16e). S. P.

1898. **LINDELOF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).

1886. **LIOUVILLE**, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).

1912. **LOVETT** (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).

1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.

1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7e).

1913. **LUSIN**, professeur adjoint à l'Université de Moscou (Russie).

1895. **MAILLET**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.

Date de l'admission.

1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée de Marseille.
1906. **MARCUS**, agrégé de l'Université, rue Frédéric-Passy, 15, à Neuilly (Seine).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).
1884. **MARTIN** (Artemas), Columbia Street 1352, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7e). S. P.
1902. **MERLIN** (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14e).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. **MONTEL**, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15e).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur a la Faculté libre des Sciences de Lille, rue Cassette, 32, à Paris (6e).
1911. **MOORE** (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.
1905. **OUIVET**, rue de Seine, 51, à Paris (6e).
1873. **OVIDIO** (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Sebastiano Valfré, 14, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Dijon.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).
1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e). S. P.
1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.
1917. **PASQUIER** (DU), professeur à l'Université, rue de la Côte, 106a, à Neufchâtel (Suisse).
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1914. **PÉRÈS**, agrégé de l'Université, professeur au lycée de Montpellier.
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques à l'École J.-B. Say, rue de la Convention, 85, à Paris (15e).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Petrograde (Russie).

Date de l'admission.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Domenico Maggiore, 9, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, professeur à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1913. **PODTIAGUINE** (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6e).

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).

1914. **POWALO-SCHWEIKOWSKI**, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 *bis*, à Paris (14e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.

1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.

1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).

1916. **ROBINSON** (L.-B), 22nd street 306 E, à Baltimore (Maryland, États-Unis).

1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1896. **ROUGIER**, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e).

1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14e).

1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Thorvaldsinsi, 193, à Copenhague (Danemark).

1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).

1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7e).

1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Pétrograde (Russie). S. P.

1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).

1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).

1912. **SIRE**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.

1916. **SOULA**, agrégé de l'Université, 40e d'infanterie, S. P. 130.

1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.

1909. **SPEISER** (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).

Date de l'admission.

1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).

1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).

1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).

1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14e).

1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).

1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.

1913. **TAMARKINE**, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 75, App. 33, à Pétrograde (Russie).

1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5e).

1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).

1913. **TIXO** (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).

1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8e).

1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).

1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).

1907. **TRIPIER** (H.), sous-directeur des études à l'École Centrale, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).

1911. **TURRIERE**, docteur ès sciences, boulevard Saint-Michel, 21, à Paris (5e).

1913. **VALIRON**, docteur ès sciences, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).

1893. **VALLÉE POUSSIN** (Ch.-J. de la), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université de Louvain (Belgique), avenue Dorian, 2, à Paris (11e).

1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.

1905. **VAN VLECK**, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).

1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).

1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'Etat, Vassili Ostrowligne 12, m. 19, à Petrograde (Russie).

1913. **VEBLEN** (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).

1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue du Petit-Chambord, 44, à Bourg-la-Reine (Seine).

1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.

1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.

1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).

1880. **WALCKENAER**, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).

1879. **WEILL**, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16e).

1906. **WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).

1911. **WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16e).

1909. **WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).

Date de admission.

1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16e).

1912. **YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Rodlinde, Épinettes, 22, à Lausanne (Suisse).

1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).

1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).

1898. **ZIWET**, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).

1909. **ZORETTI**, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1917 : MM. ANDRÉ, DARBOUX, ZABOUDSKI.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET. CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	KŒNIGS.
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.
1913	COSSERAT (F.).
1914	VESSIOT.
1915	CARTAN.
1916	FOUCHÉ.
1917	GUICHARD.
1918	MAILLET.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin.....	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne.....	Academie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.....	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague.....	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague.....	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N^lle-Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig.....	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico.....	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris.....	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris.....	Institut des Actuaires français.	France.
Paris.....	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pétrograde.....	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	*Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.....	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis.
Rennes.....	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome.....	Académie Royale des *Lincei.*	Italie
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Sophia.....	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm.....	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm.....	*Archiv for Mathematik.*	Suède.
Stockholm.....	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington.....	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram)..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1918.

PRÉSIDENCE DE M. LEBESGUE.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Communications :

M. Lebesgue : *Sur des problèmes isopérimétriques.*

Proposons-nous de déterminer dans le plan n domaines ayant des aires données $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et cela de façon que la longueur totale des courbes frontières soit minimum. Ces courbes frontières sont naturellement formées de circonférences et tout revient à déterminer les points appartenant à la frontière de plus de deux des domaines cherchés ou encore à la frontière de deux de ces domaines et à celle de la partie non utilisée du plan. Le problème dépend donc d'un système d'équations ordinaires; ces équations sont des équations transcendantes dont la résolution ne peut, en général, être faite algébriquement.

Pour se guider dans l'étude de ces systèmes d'équations on peut utiliser quelques propriétés qui font l'objet de cette Communication.

1° *En tout point commun à trois circonférences frontières, les trois circonférences se coupent sous des angles de* 120°. — En effet, supposons que cela ne soit pas réalisé pour un point M. De M comme centre traçons une circonférence dont le rayon sera l'infiniment petit principal. Cette circonférence coupe nos trois frontières en A, B, C. Soit M_1 le point qui donne le minimum pour la somme des distances à A, B, C. D'après l'hypothèse, en remplaçant les trois arcs de frontières MA, MB, MC par les trois segments rectilignes M_1A, M_1B, M_1C on diminuera la longueur totale des frontières d'un infiniment

petit du premier ordre. Il est vrai qu'on modifie des aires, mais ces modifications, étant seulement de second ordre, peuvent être compensées par de nouvelles modifications des frontières comportant seulement des variations de longueur du second ordre. En définitive on aurait donc diminué la longueur des frontières, sans modifier les aires.

2° *En aucun point n'aboutissent plus de trois circonférences frontières.* — Soient MA, MB deux circonférences frontières, A et B étant encore sur une circonférence infiniment petite de centre M. Soit M_1 le point donnant le minimum pour $M_1A + M_1B + M_1M$; ce point doit être à une distance de M qui est infiniment petite de premier ordre, sans quoi il y aurait avantage à remplacer MA et MB par $MM_1 + M_1A$ et $MM_1 + M_1B$. C'est le même raisonnement que précédemment. Donc $\widehat{AMB}$ est au moins égal à 120°. Il ne peut donc y avoir plus de trois tels angles.

3° *Les courbures, comptées dans le plan orienté, de trois circonférences frontières, aboutissant en un même point, sont liées par la relation*

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 0;$$

c'est dire que ces circonférences ont deux points communs.

Modifions chacune de ces trois circonférences de façon à ce que, pendant la modification, elles balayent toutes trois, dans le même sens, des aires égales à un infiniment petit a. La modification de longueur correspondante est

$$a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right),$$

d'où l'énoncé.

Ces résultats s'appliquent au cas où l'on voudrait traiter la question analogue pour une surface quelconque : *en aucun point il ne passe plus de trois cercles géodésiques frontières; en un point où passent trois frontières, elles se coupent sous* 120° *et leurs trois cercles de courbure géodésiques tracés dans le plan tangent ont deux points communs.*

M. Lalesco : *Sur les noyaux symétrisables.*

Les noyaux symétrisables, découverts par J. Marty, jouent un rôle important dans les applications de la théorie des équations intégrales à l'étude des équations différentielles linéaires. Reprenant une mé-

thode proposée par M. Picard, pour former les équations intégrales qui correspondent aux divers problèmes bilocaux dans la théorie des équations du second ordre, on peut développer une théorie systématique de ces problèmes et l'on trouve qu'immédiatement après les noyaux polaires et symétriques, ce sont les noyaux symétrisables qui se présentent couramment dans ces applications.

Ces noyaux symétrisables sont de diverses sortes, d'après la nature du facteur composant et du noyau résultant. Si l'on désigne par (ε) la symétrie d'un noyau ($\varepsilon = +1$ si le noyau est symétrique, $\varepsilon = -1$ si le noyau est symétrique gauche), les types des noyaux symétrisables seront caractérisés par $(\varepsilon, \varepsilon')$, ε et ε' désignant respectivement les symétries du facteur composant et du noyau résultant.

En réalité, il n'existe que trois types distincts de noyaux symétrisables, à savoir : $(1, 1)$, $(1, -1)$ et $(-1, -1)$. On peut montrer en effet que les types $(1, -1)$ et $(-1, 1)$ sont identiques. De cette identité, il résulte que cette classe de noyaux jouit de propriétés analogues à celle des noyaux symétriques gauches.

M. Fatou : *Sur l'itération de certains polynomes.*

Soit $P(z)$ le polynome qui exprime $z = \cos Ku$ en fonction de $z = \cos u$ (K pair), ou $z_1 = \sin Ku$ en fonction de $z = \sin u$ (K impair). Les problèmes relatifs à l'itération du polynome $P(z)$ sont immédiatement résolus au moyen de la représentation paramétrique. Il est facile notamment de calculer explicitement les coefficients de $P_n(z)$ au moyen de

$$P_n(z) = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(K^n u)$$

et de trouver le domaine du point à l'infini qui est un point invariant de la substitution $z_1 = P(z)$; ce domaine comprend tout le plan à l'exception du segment $(-1, +1)$ de l'axe réel.

Ces polynomes appartiennent à la classe des fractions rationnelles $R(z)$ telles que $z_1 = R(z)$ laisse invariant un arc de cercle et l'ensemble des points extérieurs à cet arc de cercle. Ces fonctions $R(z)$ se déduisent des fonctions à cercle fondamental par une transformation de la forme

$$z_1 = \frac{\alpha\sqrt{t_1} + \beta}{\gamma\sqrt{t_1} + \delta}, \qquad z = \frac{\alpha\sqrt{t} + \beta}{\gamma\sqrt{t} + \delta}.$$

SÉANCE DU 14 FÉVRIER 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, MM. Barriol, présenté par MM. Elcus et Montel; Stoïlow, présenté par MM. Appell et Fouché; Pompeiu, présenté par MM. Lalesco et Maillet; Néculcea, présenté par MM. Lalesco et Maillet.

Communications :

M. Lalesco : *Sur les séries trigonométriques et la théorie des équations intégrales.*

M. D. Hilbert, à l'aide de la théorie des noyaux symétriques appliquée aux équations différentielles linéaires du second ordre a démontré que toute fonction deux fois dérivable est développable en série de Fourier absolument et uniformément convergente.

En utilisant la théorie des noyaux symétriques gauches et une méthode de M. Picard perfectionnée pour l'application des équations intégrales aux équations différentielles linéaires, on peut démontrer que toute fonction *une fois dérivable* est développable en série de Fourier *absolument et uniformément convergente.* On peut même étendre ce théorème aux fonctions $f(x)$ de la forme

$$f(x) = \int_a^x h(s)\,ds.$$

M. Cahen : *Sur la convergence des fractions continuelles les plus générales.*

Il s'agit des fractions de la forme

$$(1) \qquad a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\left|\frac{b_2}{a_2 +}\right| \cdot \cdot,$$

les a et les b étant des nombres quelconques. Voici une règle due à Pringsheim (*Sitzungsber. d. k. Akadem. d. Wissench. zu München*, t. XXVIII, 1898, p. 312) :

Pour que la fraction précédente soit convergente, il suffit qu'on

ait, pour toute valeur de n,

$$|a_n| - |b_n| \geqq 1.$$

Ceci posé, la fraction continuelle (1) peut s'écrire

$$a_0 + \cfrac{\cfrac{b_1}{m_1} +}{\cfrac{a_1}{m_1} +} \left| \cfrac{\cfrac{b_2}{m_1 m_2}}{\cfrac{a_2}{m_2} +} \right| \cdots,$$

en ce sens que les réduites de celles-ci sont identiques aux réduites de la précédente.

Donc, la fraction continuelle (1) est convergente si l'on peut déterminer m_1, m_2, ..., tels que pour toute valeur de n, on ait

$$\left|\frac{a_n}{m_n}\right| - \left|\frac{b_n}{m_{n-1} m_n}\right| \geqq 1,$$

en particulier, si l'on peut déterminer m_1, m_2, ..., tels que pour toute valeur de n, on ait

$$(2) \qquad \left|\frac{a_n}{m_n}\right| - \left|\frac{b_n}{m_{n-1} m_n}\right| = 1.$$

Écrivons, pour simplifier, α_n, β_n, μ_n, à la place de $|a_n|$, $|b_n|$, $|m_n|$.

Des conditions (2) on tire

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = \alpha_1 - \beta_1, \\
&\mu_2 = \alpha_2 - \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\mu_n = \alpha_n - \frac{\beta_n}{\alpha_{n-1} -} \left| \cdots - \right| \frac{\beta_3}{\alpha_2 -} \left| \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1}.\right.
\end{aligned}$$

Donc *la fraction* (1) *est convergente si l'on a, pour toute valeur de n,*

$$\alpha_n - \frac{\beta_n}{\alpha_{n-1} -} \left| \cdots - \right| \frac{\beta_3}{\alpha_2 -} \left| \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} > 0.\right.$$

Cette nouvelle règle est meilleure que la précédente. En effet, la première condition entraîne la seconde, tandis que la seconde n'entraîne pas la première comme on le voit en prenant tous les μ_n compris entre zéro et un.

Exemple. — Soient tous les α égaux à 1, et tous les β égaux à $\frac{1}{4}$ sauf $\beta_1 = \frac{1}{2}$. La première règle ne donne rien. La seconde montre que la fraction est convergente car tous les μ sont égaux à $\frac{1}{2}$.

M. Cahen : *Sur les couples de nombres réels réduits.*

Nous appelons nombres *de même classe* deux nombres ω, ω', liés par une relation $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Lorsque ω est un nombre imaginaire on sait qu'il y a un nombre de même classe et un seul qui est *réduit*, c'est-à-dire dont l'affixe est dans le *domaine fondamental* $\left(\text{limité par le cercle } x^2 + y^2 = 1, \text{ et les demi-droites } x = \pm\frac{1}{2} \text{ dirigées de ce cercle vers les } y > 0\right)$.

Une définition semblable des nombres réduits est impossible pour des nombres réels. On ne peut pas définir des nombres réels réduits par des conditions de grandeur, de façon que tout nombre réduit soit de même classe qu'un seul nombre réduit, ou même qu'un nombre limité de nombres réduits. C'est un fait bien connu qui tient à ce que le groupe modulaire appliqué aux nombres réels est continu.

Cependant ce qui est impossible en général, devient possible, avec une certaine modification, pour les nombres *quadratiques*. Car soit ω un tel nombre, racine de

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ entiers}, b^2 - 4ac > 0);$$

par le procédé de Gauss, on définit un nombre limité de formes de même classe que la forme (a, b, c) et qui sont réduites. En prenant cette méthode sous la forme sous laquelle je l'ai exposée dans mes *Éléments de la théorie des nombres,* on a le résultat suivant. Disons qu'un nombre quadratique réel est réduit lorsqu'il est plus grand que 1, *et que son conjugué est compris entre* -1 *et* 0. Alors *tout nombre quadratique réel a un nombre limité de nombres qui sont de même classe que lui et qui sont réduits.* La modification dont il a été parlé plus haut consiste en ce que les conditions de grandeur portent, en même temps que sur le nombre, aussi sur son conjugué.

On est alors porté à se demander s'il est nécessaire que deux nombres soient quadratiques conjugués pour qu'une telle définition soit valable, et la réponse est qu'il n'en est rien.

Définition. — Nous appelons *couple réduit* un ensemble de deux nombres réels ω, ψ, tels que

$$-1 < \psi < 0 < 1 < \omega.$$

Nous disons que deux couples ω, ψ et ω', ψ' sont de même classe lorsque

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \psi' = \frac{\alpha\psi + \beta}{\gamma\psi + \delta} \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ entiers, } \alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Problème I. — Étant donné un couple ω, ψ, trouver un couple réduit de même classe. Pour cela on réduit ω en fraction continuelle. Soient $\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}$, $\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$ deux réduites consécutives, la première étant d'ordre pair, soit ω_{2n} le quotient complet qui vient après. On a

$$\omega = \frac{P_{2n-1}\,\omega_{2n} + P_{2n-2}}{Q_{2n-1}\,\omega_{2n} + Q_{n-2}}, \qquad P_{2n-1}\,Q_{2n-2} - P_{2n-2}\,Q_{2n-1} = 1,$$

et l'on aura $\omega_{2n} > 1$.

Si de plus on définit ψ_{2n} par

$$\psi = \frac{P_{2n-1}\,\psi_{2n} + P_{2n-2}}{Q_{2n-1}\,\psi_{2n} + P_{2n-2}},$$

on démontre facilement que pour n suffisamment grand, on a

$$-1 < \psi_{2n} < 0.$$

Le couple ω_{2n}, ψ_{2n} répond à la question.

Problème II. — Étant donné un couple ω, ψ, trouver tous les couples réduits de même classe. D'après I on peut supposer que le couple ω, ψ soit lui-même réduit. Alors on démontre la règle suivante. *On réduit ω et $-\frac{1}{\psi}$ en fractions continuelles. Soit $\frac{P_h}{Q_h}$ la réduite de rang h du premier développement $\left(\text{en appelant la première réduite } \frac{P_0}{Q_0}\right)$, et $\frac{P_{-h}}{Q_{-h}}$ la réduite de rang h du second.*

Les substitutions

$$\begin{pmatrix} Q_{2n-2} & -P_{2n-2} \\ -Q_{2n-1} & P_{2n-1} \end{pmatrix},$$

où n prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, étant appliquées au couple ω, ψ, donneront tous les couples réduits de même classe.

En général, cela donne une infinité de couples réduits. Pour qu'il n'y en ait qu'un nombre limité il faut qu'on trouve deux couples identiques, c'est-à-dire que

$$\frac{Q_{2n-2}\omega - P_{2n-2}}{-Q_{2n-1}\omega + P_{2n-1}} = \frac{Q_{2m-2}\omega - P_{2m-2}}{-Q_{2m-1}\omega + P_{2m-1}},$$

$$\frac{Q_{2n-2}\psi - P_{2n-2}}{-Q_{2n-1}\psi + P_{2n-1}} = \frac{Q_{2m-2}\psi - P_{2m-2}}{-Q_{2m-1}\psi + P_{2m-1}}.$$

Donc ω et ψ satisfont à une même équation du second degré à coefficients rationnels, et comme ils ne sont pas égaux, ils sont quadratiques conjugués.

SÉANCE DU 14 MARS 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Huber, présenté par MM. Barriol et Elcus.

Communications :

M. Giraud : *Sur les substitutions elliptiques et paraboliques de certains groupes hyperfuchsiens.*

Soit $f(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ une forme d'Hermite du type

$$uu_0 + vv_0 - ww_0,$$

u, v, w étant trois formes linéaires en x, y, z; l'indice zéro ajouté à une lettre sert ici à désigner l'imaginaire conjuguée de la lettre privée d'indice. Si les coefficients de f sont des entiers d'un certain corps k quadratique imaginaire, et si l'on considère le groupe des transformations automorphes de f dont les coefficients sont des entiers du corps k, on sait qu'on peut faire correspondre à ce groupe un des groupes nommés *hyperfuchsiens* par M. Picard.

On trouve aisément que, dans tous les corps k, sauf dans le corps $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, on peut se borner au cas où la substitution automorphe a un pour déterminant : les autres cas ne donnent pas de nouvelles substitutions hyperfuchsiennes.

Les *multiplicateurs* de la substitution automorphe sont alors donnés par une équation en s telle que

$$s^3 - as^2 + a_0 s - 1 = 0,$$

où a est un entier du corps. Si la substitution est elliptique ou parabolique, les modules des trois multiplicateurs sont égaux à un, et réciproquement. On trouve que la condition nécessaire et suffisante pour cela est que le point d'affixe a soit à l'intérieur ou sur le contour d'une hypocycloïde à trois rebroussements ayant son centre à l'origine et l'un de ses points de rebroussement au point d'abscisse 3, de l'axe réel. Une conséquence immédiate est que le nombre des systèmes possibles de multiplicateurs est fini, fait qui pouvait du reste être prévu sans calcul (et qui est vrai même pour des cas beaucoup plus généraux). Voici la liste de ces systèmes; les multiplicateurs ayant pour modules *un*, on n'écrit ici que leurs arguments; deux valeurs imaginaires conjuguées de a donnant des multiplicateurs imaginaires conjugués, on n'écrit qu'une seule de ces valeurs.

Valeurs de a communes à tous les corps, c'est-à-dire réelles, et arguments des multiplicateurs :

$$a = -1, \quad \arg. 0, \quad \pi, \quad \pi; \qquad a = 0, \quad \arg. 0, \quad \pm\frac{2\pi}{3};$$

$$a = 1, \quad \arg. 0, \quad \pm\frac{\pi}{2}; \qquad a = 2, \quad \arg. 0, \quad \pm\frac{\pi}{3}; \qquad a = 3, \quad \arg. 0, \quad 0, \quad 0.$$

Corps (i); autres valeurs de a et des arguments :

$$a = i, \quad \arg. \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4}; \qquad a = -1 + i, \quad \arg. \pi, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6};$$

$$a = -1 + 2i, \quad \arg. \pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

Corps $(i\sqrt{2})$:

$$a = -1 + i\sqrt{2}, \quad \arg. \pi, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}.$$

Corps $\left(\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right)$:

$$a = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \arg. \frac{2\pi}{7}, \quad \frac{4\pi}{7}, \quad \frac{8\pi}{7}.$$

Le corps $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ donne pour a des valeurs égales au produit

d'un des entiers réels ci-dessus par une puissance de $e^{\frac{2i\pi}{3}}$: cela a pour effet de multiplier tous les multiplicateurs par cette même puissance, et de ne pas changer la substitution hyperfuchsienne correspondante. En dehors de cela, il y a lieu, dans ce corps, de considérer le cas où la substitution automorphe considérée a pour déterminant une unité autre que *un* : on peut ramener tous les cas nouveaux à celui où ce déterminant est $e^{\frac{i\pi}{3}}$. Les multiplicateurs correspondants sont donnés par l'équation

$$s^3 - as^2 + a_0 e^{\frac{i\pi}{3}} s - e^{\frac{i\pi}{3}} = 0,$$

où a est un entier du corps. C'est alors le point $ae^{-\frac{i\pi}{9}}$ qui doit être à l'intérieur ou sur le contour de l'hypocycloïde précédente. Voici la liste de ces cas; au lieu des multiplicateurs de la substitution automorphe considérée, on a inscrit ceux de la substitution à coefficients non entiers obtenue en multipliant tous les coefficients de la première par $e^{-\frac{i\pi}{9}}$, substitution qui a alors le déterminant *un* :

$$a = 0, \text{ arg. } 0, \pm \frac{2\pi}{3}$$

(les mêmes arguments ont déjà été rencontrés d'une autre manière);

$$a = 1, \quad \text{arg.} \frac{5\pi}{9}, \quad \frac{14\pi}{9}, \quad \frac{17\pi}{9}; \qquad a = -1, \quad \text{arg.} \frac{\pi}{18}, \quad \frac{8\pi}{9}, \quad \frac{19\pi}{18};$$

$$a = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{arg.} \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{14\pi}{9};$$

$$a = \frac{5 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{arg.} \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{17\pi}{9}, \quad \frac{17\pi}{9}.$$

Les plus petites puissances de ces substitutions elliptiques qui soient la substitution identique ont pour exposant 8, 12 ou 7 ou des diviseurs de l'un de ces nombres. Notamment, dans aucun cas ce n'est la cinquième puissance.

Il faut remarquer que ces considérations ne prouvent pas l'existence effective de substitutions correspondant à chacun des cas énumérés.

M. Lalesco : *Sur l'addition des noyaux non orthogonaux.*

Lorsque deux noyaux $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ne sont pas orthogonaux, la fonction $D(\lambda)$ de Fredholm, relative au noyau-somme

$$N(x, y) = \lambda P(x, y) + \mu Q(x, y)$$

est donnée par la formule

$$D_N(\lambda, \mu) = D_P(\lambda) \times D_Q(\mu) - \frac{\lambda}{1}\frac{\mu}{1}\int_a^b D_P\begin{pmatrix} x_1 & \lambda \\ y_1 & \end{pmatrix} D_Q\begin{pmatrix} y_1 & \mu \\ x_1 & \end{pmatrix} d(x_1, y_1)$$

$$+ (-1)^r \frac{\lambda^r \mu^r}{r!\, r!}\int_a^b D_P\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_k & \lambda \\ y_1 \ldots y_k & \end{pmatrix}$$

$$\times D_Q\begin{pmatrix} y_1 \ldots y_k & \mu \\ x_1 \ldots x_k & \end{pmatrix} d(x_1, y_1)\, d(x_2, y_2) \ldots d(x_k, y_k) + \ldots,$$

les expressions sous le signe $\int$ étant les mineurs de Fredholm.

Lorsque, par exemple, $Q(x, y) = f(x)\, g(y)$, la formule se réduit, pour $\lambda = \mu$, à

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda)\left[1 + \lambda \int_a^b f(s) g(s)\, ds\right] - \lambda^2 \int_a^b D_P\begin{pmatrix} s & \lambda \\ t & \end{pmatrix} g(s) f(t)\, ds\, dt.$$

Les valeurs caractéristiques du noyau $N(x, y)$ sont alors données par l'équation

$$1 + \lambda \int_a^b f(s) g(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b g(s) \mathfrak{P}(s, t) f(t)\, ds\, dt = 0$$

qui s'étudie facilement. Ce cas particulier est utile dans la théorie des équations différentielles linéaires, d'ordre fini.

M. Montel : *Un nouveau théorème sur la convergence des séries de fonctions analytiques.*

Soient $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ... une suite infinie de fonctions analytiques bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un domaine connexe (D). Si cette suite converge uniformément sur un arc (γ) arbitrairement petit du contour limitant le domaine (D), *elle converge aussi uniformément dans tout domaine intérieur à* (D) et dont la frontière peut comprendre des portions de (γ).

Ce théorème, généralisation d'une proposition classique de Weierstrass peut servir de base à l'étude de la correspondance des points des contours dans la représentation conforme d'un domaine (Δ) sur un cercle (C). On en déduit aisément qu'à tout point accessible de la frontière (L) de (Δ) correspond un point bien déterminé de la circonférence du cercle (C), par une extension naturelle de la méthode que M. Picard a fait connaître pour le cas d'un point de (L) commun à deux arcs analytiques de (L). Le même théorème permet d'examiner la nature de la correspondance entre les points frontières pour le cas des points non accessibles de (L).

SÉANCE DU 11 AVRIL 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

SÉANCE DU 16 MAI 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Communications :

M. Lalesco : *Sur la théorie générale des fonctions orthogonales.*

Les fonctions orthogonales peuvent être classées suivant l'*ordre* des équations différentielles linéaires qui les engendrent. A ce point de vue, les fonctions orthogonales les plus simples, du *premier* ordre, sont les fonctions trigonométriques $\sin nx$ $\cos nx$. Chaque équation différentielle linéaire irréductible d'ordre n définira un certain nombre de classes de fonctions orthogonales d'ordre n.

Les fonctions orthogonales engendrées par les équations intégrales peuvent être incorporées dans cette classification car l'auteur a montré que toute équation de Fredholm revient à un problème plurilocal pour une équation différentielle linéaire d'ordre *infini*.

Pour l'étude analytique des fonctions orthogonales d'un ordre déterminé n, il faut dégager une classe de fonctions *centrales* à laquelle on rattachera ensuite toutes les autres. L'auteur propose comme fonction centrale, la solution *périodique gauche* de l'équation différentielle linéaire générale d'ordre n; elle correspond, dans une théorie systématique des problèmes plurilocaux, aux conditions bilocales les plus simples.

L'étude analytique des fonctions orthogonales périodiques gauches peut être entreprise par les mêmes moyens que celle des séries trigonométriques. En premier lieu, le théorème de Riemann reste vrai pour ces fonctions et peut servir de clef de voûte pour toute la théorie. Les expressions asymptotiques des fonctions orthogonales d'ordre n à l'aide des fonctions du premier ordre s'obtiennent facilement par des procédés d'un caractère général et propres à la théorie des équations intégrales.

M. Cahen : *Sur les séries de Dirichlet.*

M. Maillet : *Sur certaines catégories de fractions continues.*

Voir le *Bulletin de la Société*, t. XLVI, 1918, p. 1-9 : *Sur certains types de fractions continues arithmétiques.*

SÉANCE DU 13 JUIN 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Communications :

M. Laisant : *Procédé élémentaire de formation des triangles rectangles héroniens.*

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction quelconque, $\frac{q}{p}$ son inverse. Si l'on forme la demi-différence, puis la demi-somme de $\frac{p}{q}$ et $\frac{q}{p}$, on obtient deux fractions ayant même dénominateur $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$.

a, b mesurent les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont c mesure l'hypoténuse.

Si p et q ont un facteur commun δ, les trois nombres a, b, c sont divisibles par δ^2.

Si p et q sont impairs, a, b et c sont pairs.

Si p et q sont premiers entre eux, l'un de ces termes étant pair et l'autre impair, le triangle héronien de côtés a. b, c est primitif.

Remarques. — I. Si $p = 1$, on aura $c - a = 2$.

II. Si $q - p = 1$, on aura $c - b = 1$.

III. Si l'on pose $p' = q$, $q' = p + 2q$, on aura $a' - b' = -(a - b)$.

Il suit de là que si l'on forme la suite récurrente ayant pour échelle $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

$$u_1, u_2, \ldots u_n. u_{n+1}, \ldots,$$

en prenant pour p et q deux termes consécutifs, la différence $a - b$ restera la même en valeur absolue pour tous les triangles obtenus.

Par exemple,

$$1, \quad 2, \quad 5, \quad 12. \quad 29, \quad \ldots.$$

nous donne la suite indéfinie des triangles tels que $a - b = \pm 1$.

M. Giraud : *Sur certains groupes automorphes à n variables.*

Considérons une forme quadratique à $n+2$ variables, décomposable en 2 carrés négatifs et n carrés positifs, par exemple, si $n \geqq 2$, la forme

$$x_1 x_{n+2} - x_2 x_{n+1} + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2$$

(pour $n = 2$, c'est $x_1 x_4 + x_2 x_3$). Considérons les substitutions linéaires à coefficients réels qui changent cette forme en elle-même. On peut leur faire correspondre des transformations birationnelles quadratiques de la façon suivante : égalons la forme à zéro, et posons

$$g = -x_2 : x_1, \qquad g' = x_{n+1} : x_1, \qquad h_k = x_{k+2} : x_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2);$$

les variables g, g', h_k subissent un groupe de transformations birationnelles quadratiques isomorphe au groupe linéaire.

De ce groupe, on peut extraire une infinité dénombrable de transformations formant aussi un groupe. On a alors les propositions suivantes :

I. Si ce groupe est discontinu pour un point du domaine

$$x_1 x_{n+2,0} + x_{1,0} x_{n+2} + x_2 x_{n+1,0} + x_{2,0} x_{n+1} + 2 x_3 x_{3,0} + \ldots + 2 x_n x_{n,0} < 0,$$

il est discontinu dans tout ce domaine (m_0 désigne le conjugué de m, quel que soit m).

II. Si ce groupe est discontinu dans ce domaine, on peut former des séries du type Θ de Poincaré qui sont convergentes uniformément et absolument dans toute la portion de ce domaine où

$$\text{partie réelle de } (g + g') > 0.$$

III. On sait former le polyèdre fondamental de ces groupes en utilisant (méthode du rayonnement) les multiplicités

$$\begin{aligned} &|x_1 \xi_{n+2} + x_{n+2} \xi_1 + x_2 \xi_{n+1} - x_{n+1} \xi_2 - 2 x_3 \xi_3 + \ldots + 2 x_n \xi_n|^2 \\ + &|x_{1,0} \xi_{n+2} + x_{n+2,0} \xi_1 + x_{2,0} \xi_{n+1} + x_{n+1,0} \xi_2 - 2 x_{3,0} \xi_3 + \ldots + 2 x_{n,0} \xi_n|^2 \\ + \lambda &(x_1 x_{n+2,0} + x_{1,0} x_{n+2} + x_{2,0} x_{n+1} + x_2 x_{n+1,0} + 2 x_3 x_{3,0} + \ldots + 2 x_n x_{n,0}) \\ \times &(\xi_1 \xi_{n+2,0} + \xi_{1,0} \xi_{n+2} + \xi_{2,0} \xi_{n+1} + \xi_2 \xi_{n+1,0} + 2 \xi_3 \xi_{3,0} + \ldots + 2 \xi_n \xi_{n,0}) = 0. \end{aligned}$$

Ces multiplicités jouent d'ailleurs un grand rôle dans les démonstrations des deux premiers théorèmes, ainsi qu'une certaine intégrale $(2n)^{\text{uple}}$.

Le même mode de calcul, appliqué à des formes quadratiques qui ne sont pas du type indiqué en commençant, donne lieu à des groupes

pour lesquels la proposition I n'est plus vraie. Les questions de convergence des séries Θ deviennent également alors beaucoup plus compliquées.

SÉANCE DU 11 JUILLET 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

SÉANCE DU 14 NOVEMBRE 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. P. Humbert, présenté par MM. Appell et d'Ocagne.

Communications :

M. Fouché : *Démonstration géométrique des propriétés fondamentales des surfaces et des normalies.*

1. Je commence par établir les propriétés fondamentales des congruences linéaires.

Lorsqu'on fait varier les deux paramètres dont dépend la position d'une droite (X) de la congruence, un point M marqué sur cette droite décrit une certaine trajectoire, et la vitesse de ce point est la résultante des vitesses qui correspondent respectivement à la variation de chacun des deux paramètres, d'où il suit que les tangentes aux diverses trajectoires du point M sont toutes dans un même plan. Deux suites de droites prises dans la congruence à partir de la droite (X) forment deux surfaces réglées dont les plans tangents en M sont définis par la droite (X) et les tangentes aux deux trajectoires du point M. Or, ces deux surfaces réglées sont tangentes en deux points F et F_1 de la génératrice commune (X). Donc, les tangentes aux deux trajectoires du point F et la droite (X) sont dans un même plan. Alors, pour toute autre variation des deux paramètres, la tangente à la trajectoire du point F sera aussi dans ce plan, ce qui revient à dire que toutes les surfaces réglées de la

congruence passant par la droite (X) sont tangentes entre elles au point F et par conséquent aussi au point F_1. F et F_1 sont les deux foyers de la droite (X). Il est aisé de déduire de là, par des raisonnements simples, les autres propriétés de la congruence, et en particulier l'existence des deux développables contenant (X).

2. Le théorème des tangentes conjuguées consiste en ceci : « Un point M se déplaçant sur une surface, suivant une trajectoire (T), le plan tangent en M admet une caractéristique (C). Si le point M décrit une seconde trajectoire tangente à (C), la caractéristique du plan tangent sera tangente à la trajectoire primitive (T) ». On démontre généralement ce théorème en prouvant que (C) et la tangente à (T) sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice. On peut l'établir géométriquement comme il suit :

Traçons sur la surface une suite continue de courbes (T). La surface est l'enveloppe des développables circonscrites le long de chacune de ces lignes. Soient (T_1) et (T_2) deux de ces courbes infiniment voisines. Les développables correspondantes se coupent suivant une courbe (E); et quand (T_2) se rapproche indéfiniment de (T_1), les deux courbes (T_2) et (E) ont la même limite (T_1). Par un point M_1 de (T_1) menons la génératrice de la développable circonscrite le long de (T_1) : c'est la caractéristique du plan tangent quand M_1 se déplace sur (T_1). Cette génératrice rencontre (E) en un point N d'où nous menons la génératrice de la seconde développable qui touche la surface en un point M_2 de (T_2). Les plans tangents en M_1 et M_2 à la surface sont aussi tangents respectivement aux deux développables et se coupent suivant la tangente (D) menée en M à (E). On peut alors tracer sur la surface une courbe passant par M_1 et M_2 et tangente en ces deux points aux génératrices des deux développables. Si le point M_2 se rapproche indéfiniment du point M_1 en suivant cette courbe, la caractéristique du plan tangent sera la limite de la droite (D) laquelle est la tangente en M_1 à la trajectoire (T_1), ce qui démontre le théorème.

3. Il résulte de ce qui précède que les tangentes conjuguées en un point d'une surface forment dans le plan tangent une involution. Il y a donc un couple de rayons conjugués rectangulaires. Il est aisé d'en conclure qu'on peut tracer sur la surface, à partir de chaque point M, deux lignes telles que la tangente à chacune d'elles en un point quelconque est perpendiculaire à la tangente qui lui est conjuguée. Ce sont les lignes de courbure qui sont ainsi normales aux génératrices

des développables circonscrites correspondantes. Si maintenant on fait tourner toutes ces génératrices, chacune d'un angle droit dans le plan normal à la ligne de courbure, on obtiendra une suite de normales à la surface; mais d'après une propriété bien connue des courbes gauches, ces nouvelles droites formeront encore une surface développable. Ainsi se trouve établie l'existence des lignes de courbure considérées comme directrices de normalies développables.

Les normalies développables qui correspondent aux deux lignes de courbure passant par un point M admettent comme génératrice commune la normale MX, et leurs plans tangents le long de cette normale sont rectangulaires comme les deux lignes de courbure qui leur servent de base. Donc dans toute congruence de normales, les deux développables qui passent par une même droite sont rectangulaires.

4. De ce théorème fondamental on peut déduire les autres propriétés des normalies, celles des centres de courbure principaux, et les propriétés des deux nappes de la développée, au moins les principales. Pour trouver la relation entre le rayon de courbure d'une section normale et la direction de son plan, on remarque d'abord que le centre de courbure de cette section est à l'intersection de la normale au point considéré M de la surface avec le plan normal à la courbe en un point infiniment voisin M'. Si le point M décrit la section normale, la normale à la surface décrit une surface développable dont on connaît les plans tangents en trois points, savoir en M, et aux deux centres de courbure principaux, qui sont les foyers de la normale MX dans la congruence des normales. Quant au plan tangent au centre de courbure cherché G, on reconnaît facilement qu'il est perpendiculaire au plan de la section normale. Or, comme il y a correspondance homographique entre les points de contact et les directions des plans tangents, on obtiendra la position du point G et par suite le rayon de courbure cherché en écrivant que le rapport anharmonique des quatre points M, C, C', G est égal au rapport anharmonique des tangentes des quatre angles que font les quatre plans tangents avec une direction fixe. On en pourra déduire l'équation et les propriétés de l'indicatrice.

M. Bioche : *Sur la droite de Simson.*

On sait que, si d'un point M du cercle circonscrit à un triangle ABC, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont sur une droite qu'on appelle *droite*

de Simson. On sait aussi que si M décrit le cercle circonscrit à ABC la droite de Simson enveloppe un hypocycloïde à trois rebroussements; les côtés du triangle et ses hauteurs sont tangents à cette courbe. Si D est le point de concours des hauteurs de ABC, chacun des triangles DAB, DAC, DBC a ses côtés et ses hauteurs tangents à l'hypocycloïde. Il est donc naturel de se demander si l'enveloppe des droites de Simson, correspondant à un des quatre triangles ayant pour sommets trois des points A, B, C, D, n'est pas la même que celle qui correspond à chacun des autres.

C'est ce qui a lieu en effet.

Les points de rebroussement de l'hypocycloïde correspondant à ABC sont sur le cercle concentrique au cercle des neuf points de ABC et ayant un rayon triple de celui-ci. Or, le cercle des neuf points est le même pour les quatre triangles.

D'autre part, si O est le centre du cercle circonscrit à ABC, la droite OA fait, avec la droite joignant le centre du cercle des neuf points à un rebroussement, l'angle $\frac{2K\pi}{3} + \frac{2(B-C)}{3}$ (les angles étant comptés dans le sens ABC): or si O_1 est le centre du cercle circonscrit à DBC, la droite O_1D est parallèle à OA et la différence des angles à la base est encore $B - C$. Donc l'hypocycloïde correspondant à DBC a les mêmes rebroussements que celle qui correspond à ABC. Par suite, *si l'on considère quatre points* A, B, C, D *tels que l'un d'entre eux soit le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les autres, une droite de Simson correspondant à l'un de ces triangles est aussi droite de Simson pour les trois autres.*

M. G. Giraud : *Sur une équation aux dérivées partielles se rattachant aux théories des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.*

Soit Γ un groupe hyperfuchsien ou hyperabélien; on suppose que le polyèdre fondamental rayonné de Γ n'a qu'un nombre fini de faces, et que le prolongement analytique des fonctions automorphes correspondantes ne sort pas du domaine fondamental (ou *principal*) conservé par Γ, savoir du domaine

$$XX_0 - YY_0 < 1,$$

dans le cas hyperfuchsien, ou du domaine

$$XX_0 < 1, \quad YY_0 < 1,$$

dans le cas hyperabélien; les indices zéro distinguent les imaginaires conjuguées. Alors toutes les fonctions automorphes de X et de Y cor-

respondantes s'expriment rationnellement au moyen de trois d'entre elles ξ, η, ζ, liées elles-mêmes par une relation algébrique

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{1}$$

Posons alors, dans le cas hyperfuchsien,

$$u = \log\left[144\left|\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}\right|^2 (1 - XX_0 - YY_0)^{-3}\right],$$

et dans le cas hyperabélien,

$$u = \log\left[64\left|\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}\right|^2 (1 - XX_0)^{-2}(1 - YY_0)^{-2}\right].$$

En outre, soient

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it,$$

x, y, z, t étant réels. *u est alors uniforme sur la surface algébrique* (1) *et satisfait à l'équation*

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2 = e^u, \tag{2}$$

et à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0. \tag{3}$$

Ces conditions (2) et (3) peuvent aussi s'écrire

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)}{\partial(\xi_0, \eta_0)} = \frac{e^u}{16}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \xi_0} > 0.$$

La généralisation qui s'introduit par la considération de plusieurs exemples de fonctions automorphes d'un nombre quelconque n de variables est la suivante : u doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right)}{\partial(\xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \xi_{n,0})} = ke^u,$$

où $k > 0$, et aux inégalités signifiant que l'hermitien en x_1, x_2, ..., x_n,

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p\,\partial \xi_{q,0}} x_p x_{q,0}$$

est défini positif. Pour $n = 1$, on retrouve l'équation bien connue par les travaux de M. Picard, suivis de ceux de Poincaré,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u.$$

Un problème analogue à celui que ces illustres géomètres ont traité peut dès maintenant se poser relativement aux conditions (2) et (3).

SÉANCE DU 12 DÉCEMBRE 1918.

PRÉSIDENCE DE M. MAILLET.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. Angelesco, présenté par MM. Appell et Lalesco; M. Lefschety, présenté par MM. Picard et Breitling.

Communication :

M. Auric : *Sur la déformation des milieux homogènes amorphes ou cristallins.*

Dans un milieu homogène soumis à une déformation infiniment petite, une sphère de centre O et de rayon suffisamment petit devient une quadrique, à la condition de négliger les infiniment petits d'ordre supérieur.

Un milieu sera dit homogène (comme en cristallographie) lorsque toute propriété, scalaire ou vectorielle, du point O dans la direction OM aura lieu pour un autre point quelconque O_1 dans la direction $O_1 M_1$ parallèle à OM et de même sens.

La théorie mathématique actuelle repose entièrement sur la détermination des éléments de la quadrique transformée de la sphère en chaque point du milieu et la déformation de celui-ci est définie par les coefficients mêmes de l'équation de cette quadrique.

On admet habituellement, bien que cette double hypothèse ne corresponde nullement au cas le plus général de la déformation : 1° que le centre de la sphère reste le centre de la quadrique; 2° que le trièdre principal de celle-ci était, avant la déformation, un trièdre trirectangle de la sphère.

Sous l'influence des idées de Cauchy et de ses disciples, le milieu a toujours été considéré comme continu au sens mathématique : or,

les progrès de la cristallographie et de la théorie atomistique semblent indiquer que cette notion du continu doit être abandonnée et remplacée par l'hypothèse d'un ou plusieurs groupements périodiques d'éléments suffisamment petits, juxtaposés suivant un ou plusieurs systèmes de réseaux.

Pour toute déformation, et d'une manière générale, pour tout changement du milieu, il n'y aura autour d'un point O qu'un domaine D, plus ou moins étendu, véritablement intéressé à ce changement, au point de vue des conséquences qui en résulteront pour le point O : suivant que ce domaine D est de l'ordre de grandeur des éléments ci-dessus définis ou contient un très grand nombre de ces éléments, le milieu se comportera à l'égard de ce changement, soit comme un milieu cristallin, soit comme un milieu amorphe en moyenne.

Les actions analogues à la gravité sont proportionnelles à la masse, c'est-à-dire au volume des éléments; celles analogues à la capillarité sont proportionnelles à la tension superficielle, c'est-à-dire à leur surface : on comprend dès lors très bien que pour des éléments suffisamment petits, ces dernières actions deviennent tout à fait prépondérantes par rapport aux premières.

La recherche de la quadrique transformée d'une sphère infiniment petite revient en somme à étudier le changement produit dans la distance de deux points infiniment voisins; cette étude fournirait des renseignements très intéressants sur la déformation du milieu, mais à la condition de ne pas négliger systématiquement les translations et les rotations subies par la droite joignant ces deux points.

Pour ne pas compliquer une question dejà fort difficile, nous estimons qu'il convient de rechercher tout d'abord s'il existe dans une déformation infiniment petite autour d'un point des éléments géométriques simples, tels que plans, quadriques, etc., restant homothétiques à eux-mêmes.

En ce qui concerne les plans, le résultat est bien connu [1]; il existe toujours un ou trois plans réels restant, dans le voisinage d'un point O, homothétiques à eux-mêmes; la solution dépend d'une équation générale en S du troisième degré, ce qui explique la possibilité de deux racines imaginaires; lorsque les trois racines sont réelles, on obtient aisément autour du point O, au moyen de ces trois plans, la

---

[1] *Voir* Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 372, exercice 6.

maille parallélépipédique du réseau cristallin correspondant au milieu.

En ce qui concerne les quadriques, la question n'a jamais été étudiée, bien qu'elle ne présente aucune difficulté; il faut, bien entendu, prendre leur équation sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire admettre que leur centre ne coïncide pas nécessairement avec le point O; on connaît, en effet, des cristaux, tels que la tourmaline, qui possèdent des propriétés différentes en un même point suivant qu'on considère une direction ou la direction opposée.

Dans ces conditions, la recherche des quadriques homothétiques dépendra d'une équation du neuvième degré, puisqu'il y a neuf coefficients à rendre proportionnels; il y aura toujours au moins une quadrique réelle satisfaisant à la question et pouvant représenter, à une première approximation, l'élément infinitésimal caractéristique du milieu : d'autres quadriques réelles pourront également être envisagées et, s'il existe deux quadriques imaginaires conjuguées, on pourra les remplacer par la courbe réelle biquadratique donnée par leur intersection.

On pourrait, soit étudier les différents cas particuliers fournis par ces quadriques ainsi que leurs positions respectives par rapport à la maille du réseau, soit au contraire examiner les cas plus généraux de surfaces cubiques, biquadratiques, etc., restant homothétiques entre elles.

Nous renverrons à une Note ultérieure l'exposé des résultats ainsi obtenus et nous nous bornerons à donner ici la discussion relative aux différentes mailles possibles.

En adoptant les notations du Traité de M. Appell (t. III, p. 237), l'équation en S s'écrit :

$$\begin{vmatrix} u'_x - S & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y - S & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z - S \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'équation a trois racines réelles, nous avons vu que la maille du réseau s'en déduit immédiatement.

L'équation peut avoir une racine réelle qui correspond à un plan réel Π et deux racines imaginaires conjuguées qui représentent deux plans imaginaires se coupant suivant une droite réelle Δ.

Il y a lieu de rechercher dans le plan réel Π les droites qui restent parallèles à elles-mêmes. On voit aisément que cette question dépend d'une équation en S du deuxième degré et que les solutions sont les asymptotes de l'indicatrice correspondante.

Si ces asymptotes sont réelles, on obtiendra deux nouvelles droites qui formeront avec la première Δ un trièdre réel et l'on sera ramené au cas général.

Si les asymptotes sont imaginaires, l'indicatrice sera une ellipse qui restera homothétique à elle-même; on aura donc comme élément infinitésimal du milieu non un parallélépipède, mais un cylindre droit ou oblique, à base elliptique, dont les génératrices seront parallèles à la droite réelle Δ.

On peut dire que ces éléments possèdent un plan de polarisation parallèle à la base du cylindre.

Ce résultat est également obtenu si le trièdre réel se réduit à un seul plan : car dans ce cas l'élément infinitésimal est non plus un cylindre, mais une ellipse contenue dans ce plan.

Rapport de la Commission des Comptes.

(MM. Humbert, président; Fouret, Bioche.)

Messieurs et Chers Collègues,

Conformément à l'article 16 de nos Statuts et aux articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée par votre Conseil d'administration de vous faire un rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

La Commission a tout d'abord examiné les comptes de l'exercice 1913-1914, arrêtés au 2 août 1914, M. Servant, trésorier, ayant été mobilisé.

La Commission, à l'unanimité, approuve les comptes de M. Servant et lui donne quitus de sa gestion.

Pendant la durée des hostilités, M. Cahen a bien voulu assurer la charge de la trésorerie, mais il a été impossible d'arrêter chaque année les comptes de façon définitive, aussi MM. Cahen et Servant nous ont présenté un compte d'ensemble relatif à la période totale de la guerre arrêté au 31 décembre 1918.

Bilan au 31 décembre 1918.

	fr
Caisse	1176,15
Société Générale	3362,51
Portefeuille	24007,09
Stock Bulletin	5377,25
Cotisations arriérées	3500 »
Pertes et profits	2856,85
Total	40279,85
Facture Gauthier-Villars (évaluation)	3807,15
Cotisations d'avance	770 »
Réserves inaliénables	1600 »
Portefeuille disponible, dépréciation	5492,29
Créances douteuses	3500 »
Capital au 31 octobre 1913	25110,41
Total	40279,85

Ce bilan appelle quelques observations :

La situation de caisse et de banque est satisfaisante et permet de faire face aux dépenses courantes.

Le chiffre des pertes des exercices 1914-1918 est peu important et il faut remarquer qu'il est occasionné uniquement par la dépréciation du portefeuille disponible. Ce résultat, dû à la sage administration de MM. Cahen et Montel, permet d'envisager avec la plus grande confiance l'avenir de la Société.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

État de la Société au commencement de 1918 1

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin 12

Comptes rendus des séances 15

Rapport de la Commission des Comptes 37

Communications :

MM. *Auric :* Sur la déformation des milieux homogènes amorphes ou cristallins 34

Bioche : Sur la droite de Simson 31

Cahen : Sur la convergence des fractions continuelles les plus générales 18

— Sur les couples de nombres réels réduits 20

— Sur les séries de Dirichlet 26

Fatou : Sur l'itération de certains polynomes 17

Fouché : Démonstration géométrique des propriétés fondamentales des surfaces et des normalies 29

Giraud : Sur les substitutions elliptiques et paraboliques de certains groupes hyperfuchsiens 22

— Sur certains groupes automorphes à n variables 28

— Sur une équation aux dérivées partielles se rattachant aux théories des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes. 32

Laisant : Procédé élémentaire de formation des triangles rectangles héroniens 27

Lalesco : Sur les noyaux symétrisables 16

— Sur les séries trigonométriques et la théorie des équations intégrales 18

— Sur l'addition des noyaux non orthogonaux 24

— Sur la théorie générale des fonctions orthogonales 26

Lebesgue : Sur des problèmes isopérimétriques 15

Maillet : Sur certaines categories de fractions continues 27

Montel : Un nouveau théorème sur la convergence des séries de fonctions analytiques 25

40

QA
1
S59
t.45-46
Physical &
Applied Sci.
Serials

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY